Halley法と拡張Halley法（土倉・堀口・村瀬·Halley法）の収束比較式Ⅰ（等式の場合）とその数値計算

堀　口　俊　二

2014年２月
新潟産業大学経済学部紀要　第43号別刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.43　February　2014

Halley法と拡張Halley法（土倉[1]・堀口・村瀬・Halley法）の収束比較式Ⅰ（等式の場合）とその数値計算

The formulas Ⅰ (in the case of an equation) to compare the convergence of Halley method and the extended Halley method(Tsuchikura-Horiguchi-Murase -Halley method) and the numerical calculations

堀　口　俊　二（新潟産業大学）

Shunji HORIGUCHI

要旨

1673年村瀬義益（佐渡→江戸→下総（現在の千葉県））は『算法勿憚改』[8] を著した．この書で村瀬は，３次方程式から２種類の２乗の漸化式x_n^2と３次方程式の変形を導いた．この変形式の文章は短文にもかかわらず長年未解読であつた．しかし2009年５月に藤井康生が解読に成功した[5]．村瀬は変形式でホーナー法も研究している．江戸時代初期にこのような研究がされているのである．鈴木武雄［9］は「村瀬は和算史上だけでなく，世界数学史上でも稀有な存在である」と評価している．日本にはこのような独創性のある和算家がいるのである．変形式の解読により研究が進展した．2009年中頃に３つの式より，我々は村瀬の２乗の漸化式が，ニュートン・ラフソン法（1690）の拡張に繋がることを発見し，q乗の土倉・堀口法として与えた［3］．さらに本稿では§1においてニュートン・ラフソン法の改良であるHalley法の拡張を与える．§2は拡張Halley法の収束式および収束比較式（等式の場合）を与える．§3 は収束比較式（等式の場合）の数値計算を行う．

和算から現代数学（西洋数学）の論文を書くことは極めて難しく，本稿を含めたこれまでの一連の研究が最初であろう．さらに一連の研究は江戸時代の日本の文化が高いことも示している．もし数学教室の図書室を自由に利用可能なら，ここで現代数学の良質な論文を読む方が多くの収穫が得られる．

Summary The present Japanese mathematics is Western mathematics. However this paper developed from Japanese native mathematics in Japan. We extend the Halley method. We will give the numerical calculations of the formulas Ⅰ (in the case of an equation) to compare the convergence of the Halley method and extended the Halley method(Tsuchikura-Horiguchi-Murase-Halley method). We led the extended Halley method with Murase's

1　東北大学名誉教授土倉保

recurrence formulas of the square x_n^2 in 1673([8]) as a hint. There is a mathematician with such an originality in the Edo era in Japan.

1．Halley法と拡張Halley法（土倉・堀口・村瀬・Halley法（*THMH*法））

本稿で扱う関数は必要に応じて i (≧1)回微分可能で連続とする．

定義1.1.　実変数 x の方程式 $f(x)=0$ の解（根）α を近似する漸化式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

をニュートン（1669）・ラフソン（1690）法という．以後，単にニュートン法という．

ニュートン法は次のようにして得られる．先ず $y=f(x)$ の１次までのTaylor展開式

$$y=f(x)\fallingdotseq f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)$$

を作る．次に $y=0$ とおいて，x軸との交点を求める．

$$x\fallingdotseq x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ここで $x=x_{n+1}$ と置けばよい．この式の幾何学の解釈は，$y=f(x)$ の点 $(x_n, f(x_n))$ における接線がx軸と交わる点が x_{n+1} であることを意味している．

定義1.2.　実変数 x の方程式 $f(x)=0$ の解（根）αを近似する漸化式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)-\frac{1}{2}\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)}}$$

をHalley法[2] という．

Halley法は次のようにして得られる．先ず $y=f(x)$ の ２次までのTaylor展開式

$$y=f(x)\fallingdotseq f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)+\frac{f''(x_n)}{2}(x-x_n)^2$$

を作る．次に $y=0$ とおいて，x軸との交点を求める．

2　Edmond Halley(1656-1742)は英国の天文学者で，ハレー彗星の研究で有名である．

$$x \fallingdotseq x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \dfrac{f''(x_n)}{2}(x - x_n)}$$

最後に左辺に $x = x_{n+1}$，右辺の分母の $x - x_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$（ニュートン法の式）に置き換えると得られる．

実変数 x の関数 $y=f(x)$ を $x^q=t$（q は 0 でない実数）により変数変換した関数を $y=g(t)$ とする．すなわち

$$g(t) := f(t^{1/q}) = f(x)$$

この関数は $g(x^q)=f(x)$ となるから，$y=f(x)$ を高さは変えないでx軸方向に $x^q=t$ だけ伸縮したグラフとなる．

村瀬[8]の x_n^2 の漸化式をヒントにして，Halley法の拡張としてq乗の漸化式 x_n^q を与える．

定理1.3.　qを 0 でない実数定数とする．次式は実数 x の方程式 $f(x)=0$ の解（根）α の q乗 α^q を近似する漸化式である．

$$x_{n+1}^q = x_n^q - q x_n^{q-1} \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \dfrac{1}{2}\dfrac{f(x_n)\left(\dfrac{1}{q x_n^{q-1}} f''(x_n) + (1-q)\dfrac{1}{x_n} f'(x_n)\right)}{f'(x_n)}}$$

証明　$y=g(t)$ にHalley法を適用すると

$$t_{n+1} = t_n - \frac{g(t_n)}{g'(t_n) + \dfrac{1}{2}\dfrac{g''(t_n)}{g'(t_n)}}$$

となる．ここで $t=x^q$ とおき，$g(t), g'(t), g''(t)$ を $f(x), f'(x), f''(x)$ で表せばよい．　□

定義1.4.　定理1.3の漸化式を土倉･堀口･村瀬・Halley法（*THMH*法）あるいは拡張Halley法という．特に $q=1$ のときHalley法になる．

*THMH*法の計算は次式で行う．

$$x_{n+1} = \left[x_n^q - q x_n^{q-1} \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \dfrac{1}{2}\dfrac{f(x_n)\left(\dfrac{1}{q x_n^{q-1}} f''(x_n) + (1-q)\dfrac{1}{x_n} f'(x_n)\right)}{f'(x_n)}} \right]^{\frac{1}{q}}$$

２．土倉・堀口・村瀬・Halley法（*THMH*法）の収束式と収束比較式Ⅰ（等式の場合）

最初にニュートン法の収束を述べる．

定理2.1.　α を $f(x)=0$ の根とする．$x_n \to \alpha$ のとき，ニュートン法は，α が単根のとき次の２次収束をする．

$$x_{n+1}-\alpha \fallingdotseq \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}(x_n-\alpha)^2$$

α が m 重根 $(m \geqq 2)$ のとき，次の１次収束をする．

$$x_{n+1}-\alpha \fallingdotseq \left(1-\frac{1}{m}\right)(x_n-\alpha)$$

証明　α は単根，すなわち $f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)\neq 0$ の場合
以下，計算の簡略化のため必要に応じて $f(x)$ を単に f と表す．

$$e_n = x_n - \alpha$$

と置く．

$$x_{n+1}-\alpha = x_n - \alpha - \frac{f}{f'}$$

すなわち

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f}{f'}$$

から２次収束の式を導く．そのために必要な計算を以下で行う．
Taylorの定理を用いる．

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= f(\alpha+e_n)\\
&= f(\alpha)+f'(\alpha)e_n+\frac{1}{2}f''(\alpha)e_n^2+\frac{1}{6}f'''(\alpha)e_n^3+O(e_n^4)\\
&\fallingdotseq f'(\alpha)e_n+\frac{1}{2}f''(\alpha)e_n^2+\frac{1}{6}f'''(\alpha)e_n^3\\
f'(x_n) &= f'(\alpha+e_n)\\
&= f'(\alpha)+f''(\alpha)e_n+\frac{1}{2}f'''(\alpha)e_n^2+\frac{1}{6}f^{(4)}(\alpha)e_n^3+O(e_n^4)\\
&\fallingdotseq f'(\alpha)+f''(\alpha)e_n+\frac{1}{2}f'''(\alpha)e_n^2+\frac{1}{6}f^{(4)}(\alpha)e_n^3
\end{aligned}$$

したがって

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f'e_n + \frac{1}{2}f''e_n^2 + \frac{1}{6}f'''e_n^3}{f' + f''e_n + \frac{1}{2}f'''e_n^2 + \frac{1}{6}f^{(4)}e_n^3}$$

$$= e_n - \left(e_n - \frac{f''}{2f'}e_n^2 + Ae_n^3 + \frac{Be_n^4 + Ce_n^5 + De_n^6}{f' + f''e_n + \frac{1}{2}f'''e_n^2 + \frac{1}{6}f^{(4)}e_n^3} \right)$$

ここで$e_n^3, e_n^4, e_n^5, e_n^6$の係数をそれぞれ$A,B,C,D,E$とした．$e_n$の３次以上の項を省略すると

$$e_{n+1} \fallingdotseq \frac{f''}{2f'}e_n^2$$

となる．

α がm重根なら，$f(x)=(x-\alpha)^m h(x)$，$h(\alpha)\neq 0$ と表され，$f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0$ であるからTaylorの定理による式はこれらの項はなくなり，

$$e_{n+1} = e_n - \frac{\frac{1}{m!}f^{(m)}e_n^m + \cdots}{\frac{1}{(m-1)!}f^{(m)}e_n^{m-1} + \cdots}$$

$$\fallingdotseq \left(1 - \frac{1}{m}\right)e_n$$

となる．　□

定理2.2.　数列 $\{x_n\}$ において$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$とする．$q, r$を０でない任意な実数定数とする．このとき$\alpha$に十分近い$x_n$に対して

$$x_n^q - \alpha^q \fallingdotseq \frac{q}{r}\alpha^{q-r}(x_n^r - \alpha^r)$$

となる．

証明　ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{x^q-\alpha^q}{x^r-\alpha^r}=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x^q-\alpha^q)'}{(x^r-\alpha^r)'}$$
$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{qx^{q-1}}{rx^{r-1}}$$
$$=\frac{q}{r}\alpha^{q-r}$$

となる．したがって x が十分 α に近いとき

$$\frac{x^q-\alpha^q}{x^r-\alpha^r}\fallingdotseq\frac{q}{r}\alpha^{q-r}$$

となる．ここで x を数列 x_n に置き換えればよい．　□

定理2.3.　Halley法は，α が単根のとき３次収束する：

$$x_{n+1}-\alpha\fallingdotseq\frac{\frac{1}{2}f''(\alpha)^2-\frac{1}{3}f'(\alpha)f'''(\alpha)}{2f'(\alpha)^2}(x_n-\alpha)^3.$$

α が m重根のとき１次収束する：

$$x_{n+1}-\alpha\fallingdotseq\left(1-\frac{2}{m+1}\right)(x_n-\alpha).$$

証明　αは単根，すなわち$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)\neq 0$ の場合

$$e_n=x_n-\alpha$$

と置く．

$$x_{n+1}-\alpha=x_n-\alpha-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)-\frac{1}{2}\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)}}$$

すなわち

$$e_{n+1}=e_n-\frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2-f(x_n)f''(x_n)}$$

$$=\frac{(2f'(x_n)^2-f(x_n)f''(x_n))e_n-2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2-f(x_n)f''(x_n)}$$

から３次収束の式を導く．そのために必要な計算を以下で行う．

Taylorの定理を多用する．

$$
\begin{aligned}
f(x_n) &= f(\alpha + e_n) \\
&= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{6}f'''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4) \\
&\fallingdotseq f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{6}f'''(\alpha)e_n^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x_n) &= f'(\alpha + e_n) \\
&= f'(\alpha) + f''(\alpha)e_n + \frac{1}{2}f'''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{6}f^{(4)}(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4) \\
&\fallingdotseq f'(\alpha) + f''(\alpha)e_n + \frac{1}{2}f'''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{6}f^{(4)}(\alpha)e_n^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x_n) &= f''(\alpha + e_n) \\
&= f''(\alpha) + f'''(\alpha)e_n + \frac{1}{2}f^{(4)}(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{6}f^{(5)}(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4) \\
&\fallingdotseq f''(\alpha) + f'''(\alpha)e_n + \frac{1}{2}f^{(4)}(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{6}f^{(5)}(\alpha)e_n^3
\end{aligned}
$$

これらの積を計算する.

$$
\begin{aligned}
f \cdot f' &= \left(f'e_n + \frac{1}{2}f''e_n^2 + \frac{1}{6}f'''e_n^3\right)\left(f' + f''e_n + \frac{1}{2}f'''e_n^2 + \frac{1}{6}f^{(4)}e_n^3\right) \\
&= f'^2 e_n + f'f''e_n^2 + \frac{1}{2}f'f'''e_n^3 + \frac{1}{6}f'f^{(4)}e_n^4 + \frac{1}{2}f'f''e_n^2 + \frac{1}{2}f''^2e_n^3 + \frac{1}{4}f''f'''e_n^4 + \frac{1}{12}f''f^{(4)}e_n^5 + \frac{1}{6}f'f'''e_n^3 \\
&\quad + \frac{1}{6}f''f'''e_n^4 + \frac{1}{12}f'''^2e_n^5 + \frac{1}{36}f'''f^{(4)}e_n^6 \\
&= f'^2 e_n + \frac{3}{2}f'f''e_n^2 + \left(\frac{2}{3}f'f''' + \frac{1}{2}f''^2\right)e_n^3 + \left(\frac{1}{6}f'f^{(4)} + \frac{5}{12}f''f'''\right)e_n^4 + \left(\frac{1}{12}f''f^{(4)} + \frac{1}{12}f'''^2\right)e_n^5 \\
&\quad + \frac{1}{36}f'''f^{(4)}e_n^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'^2 &= \left(f' + f''e_n + \frac{1}{2}f'''e_n^2 + \frac{1}{6}f^{(4)}e_n^3\right)\left(f' + f''e_n + \frac{1}{2}f'''e_n^2 + \frac{1}{6}f^{(4)}e_n^3\right) \\
&= f'^2 + f'f''e_n + \frac{1}{2}f'f'''e_n^2 + \frac{1}{6}f'f^{(4)}e_n^3 + f'f''e_n + f''^2e_n^2 + \frac{1}{2}f''f'''e_n^3 + \frac{1}{6}f''f^{(4)}e_n^4 + \frac{1}{2}f'f'''e_n^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}f''f'''e_n^3 + \frac{1}{4}f'''^2e_n^4 + \frac{1}{12}f'''f^{(4)}e_n^5 + \frac{1}{6}f'f^{(4)}e_n^3 + \frac{1}{6}f''f^{(4)}e_n^4 + \frac{1}{12}f'''f^{(4)}e_n^5 + \frac{1}{36}f^{(4)2}e_n^6
\end{aligned}
$$

$$= f'^2 + (ff'' + ff'')e_n + \left(\frac{1}{2}ff''' + f''^2 + \frac{1}{2}ff'''\right)e_n^2 + \left(\frac{1}{6}ff^{(4)} + \frac{1}{2}f''f''' + \frac{1}{2}f''f''' + \frac{1}{6}ff^{(4)}\right)e_n^3$$

$$+\left(\frac{1}{6}f''f^{(4)} + \frac{1}{4}f'''^2 + \frac{1}{6}f''f^{(4)}\right)e_n^4 + \left(\frac{1}{12}f'''f^{(4)} + \frac{1}{12}f'''f^{(4)}\right)e_n^5 + \frac{1}{36}f^{(4)2}e_n^6$$

$$= f'^2 + 2ff''e_n + (ff''' + f''^2)e_n^2 + \left(\frac{1}{3}ff^{(4)} + f''f'''\right)e_n^3 + \left(\frac{1}{3}f''f^{(4)} + \frac{1}{4}f'''^2\right)e_n^4 + \frac{1}{6}f'''f^{(4)}e_n^5$$

$$+\frac{1}{36}f^{(4)2}e_n^6$$

$$ff'' = \left(f'e_n + \frac{1}{2}f''e_n^2 + \frac{1}{6}f'''e_n^3\right)\left(f'' + f'''e_n + \frac{1}{2}f^{(4)}e_n^2 + \frac{1}{6}f^{(5)}e_n^3\right)$$

$$= ff''e_n + ff'''e_n^2 + \frac{1}{2}ff^{(4)}e_n^3 + \frac{1}{6}ff^{(5)}e_n^4 + \frac{1}{2}f''^2e_n^2 + \frac{1}{2}f''f'''e_n^3 + \frac{1}{4}f''f^{(4)}e_n^4 + \frac{1}{12}f''f^{(5)}e_n^5$$

$$+\frac{1}{6}f''f'''e_n^3 + \frac{1}{6}f'''^2e_n^4 + \frac{1}{12}f'''f^{(4)}e_n^5 + \frac{1}{36}f'''f^{(5)}e_n^6$$

$$= ff''e_n + \left(ff''' + \frac{1}{2}f''^2\right)e_n^2 + \left(\frac{1}{2}ff^{(4)} + \frac{1}{2}f''f''' + \frac{1}{6}f''f'''\right)e_n^3 + \left(\frac{1}{6}ff^{(5)} + \frac{1}{4}f''f^{(4)} + \frac{1}{6}f'''^2\right)e_n^4$$

$$+\left(\frac{1}{12}f''f^{(5)} + \frac{1}{12}f'''f^{(4)}\right)e_n^5 + \frac{1}{36}f'''f^{(5)}e_n^6$$

$$= ff''e_n + \left(ff''' + \frac{1}{2}f''^2\right)e_n^2 + \left(\frac{1}{2}ff^{(4)} + \frac{2}{3}f''f'''\right)e_n^3 + \left(\frac{1}{6}ff^{(5)} + \frac{1}{4}f''f^{(4)} + \frac{1}{6}f'''^2\right)e_n^4$$

$$+\left(\frac{1}{12}f''f^{(5)} + \frac{1}{12}f'''f^{(4)}\right)e_n^5 + \frac{1}{36}f'''f^{(5)}e_n^6$$

これらの積をもとにして分母を計算する.

$$2f'^2 - ff'' = 2f'^2 + 4ff''e_n + (2ff''' + 2f''^2)e_n^2 + \left(\frac{2}{3}ff^{(4)} + 2f''f'''\right)e_n^3 + \left(\frac{2}{3}f''f^{(4)} + \frac{1}{2}f'''^2\right)e_n^4$$

$$2f'^2 - ff'' = 2f'^2 + 4ff''e_n + (2ff''' + 2f''^2)e_n^2 + \left(\frac{2}{3}ff^{(4)} + 2f''f'''\right)e_n^3 + \left(\frac{2}{3}f''f^{(4)} + \frac{1}{2}f'''^2\right)e_n^4$$

$$+\frac{1}{3}f'''f^{(4)}e_n^5 + \frac{1}{18}f^{(4)2}e_n^6 - ff''e_n - \left(ff''' + \frac{1}{2}f''^2\right)e_n^2 - \left(\frac{1}{2}ff^{(4)} + \frac{2}{3}f''f'''\right)e_n^3$$

$$-\left(\frac{1}{6}ff^{(5)} + \frac{1}{4}f''f^{(4)} + \frac{1}{6}f'''^2\right)e_n^4 - \left(\frac{1}{12}f''f^{(5)} + \frac{1}{12}f'''f^{(4)}\right)e_n^5 - \frac{1}{36}f'''f^{(5)}e_n^6$$

$$= 2f'^2 + 3ff''e_n + \left(ff''' + \frac{3}{2}f''^2\right)e_n^2 + \left(\frac{1}{6}ff^{(4)} + \frac{4}{3}f''f'''\right)e_n^3 + \left(-\frac{1}{6}ff^{(5)} + \frac{5}{12}f''f^{(4)} + \frac{1}{3}f'''^2\right)e_n^4$$

$$+\left(-\frac{1}{12}f''f^{(5)} + \frac{1}{4}f'''f^{(4)}\right)e_n^5 - \frac{1}{36}f'''f^{(5)}e_n^6$$

分子を計算する.

$$
\begin{aligned}
(2f'^2-ff'')e_n-2ff' &= \left(-\frac{1}{3}f'f'''+\frac{1}{2}f''^2\right)e_n^3+\left(-\frac{1}{2}f'f^{(4)}+\frac{1}{2}f''f'''\right)e_n^4 \\
&\quad+\left(\frac{1}{4}f''f^{(4)}+\frac{1}{6}f'''^2\right)e_n^5+\left(\frac{7}{36}f'''f^{(4)}-\frac{1}{12}f''f^{(5)}\right)e_n^6-\frac{1}{36}f'''f^{(5)}e_n^7 \\
&\fallingdotseq\left(\frac{1}{2}f''^2-\frac{1}{3}f'f'''\right)e_n^3
\end{aligned}
$$

これらの分母，分子の展開式で

$$
\frac{(2f'^2-ff'')e_n-2ff'}{2f'^2-ff''}
$$

の割算を行う．$e_n, e_n^2, e_n^3, e_n^4, e_n^5, e_n^6$ の係数を A,B,C,D,E,F とすると次式を得る.

$$
\begin{aligned}
\frac{(2f'^2-ff'')e_n-2ff'}{2f'^2-ff''} &= \left(\frac{1}{4}\frac{f''^2}{f'^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{f'f'''}{f'^2}+Ae_n+Be_n^2+Ce_n^3+De_n^4+Ee_n^5+Fe_n^6\right)e_n^3 \\
&= \left(\frac{1}{4}\frac{f''^2}{f'^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{f'f'''}{f'^2}\right)e_n^3+Ae_n^4+Be_n^5+Ce_n^6+De_n^7+Ee_n^8+Fe_n^9
\end{aligned}
$$

ここで e_n^4 以上の高次の項を省略すると

$$
x_n-\alpha\fallingdotseq\frac{\frac{1}{2}f''(x_n)^2-\frac{1}{3}f'(x_n)f'''(x_n)}{2f'(x_n)^2}(x_n-\alpha)^3
$$

となり，３次収束する.

αが $m(\geqq 2)$ 重根の場合

$$
\begin{aligned}
&f(x)=(x-\alpha)^m h(x),\ h(\alpha)\neq 0 \\
&f'(x)=m(x-\alpha)^{m-1}h+(x-\alpha)^m h' \\
&f''(x)=(x-\alpha)^{m-2}(m(m-1)h+2mh'(x-\alpha)+(x-\alpha)^2 h'')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f'^2=m^2(x-\alpha)^{2m-2}h^2+2m(x-\alpha)^{2m-1}hh'+(x-\alpha)^{2m}h'^2 \\
&ff''=h(x-\alpha)^{2m-2}(m(m-1)h+2mh'(x-\alpha)+h''(x-\alpha)^2) \\
&2f'^2-ff'=(m^2h^2+mh^2)(x-\alpha)^{2m-2}+2mhh'(x-\alpha)^{2m-1}+(2h'^2-hh'')(x-\alpha)^{2m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'-\frac{1}{2}\frac{ff''}{f'} &= \frac{2f'^2-ff''}{2f'} \\
&= \frac{(m^2h^2-mh^2)(x-\alpha)^{2m-2}+2mhh'(x-\alpha)^{2m-1}+(2h'^2-hh'')(x-\alpha)^{2m}}{2mh(x-\alpha)^{m-1}+2h'(x-\alpha)^m} \\
&= \frac{(m^2h^2+mh^2)(x-\alpha)^{m-1}+2mhh'(x-\alpha)^m+(2h'^2-hh'')(x-\alpha)^{m+1}}{2mh+2h'(x-\alpha)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad x_{n+1}-\alpha &= x_n-\alpha-\frac{f}{\dfrac{2f'^2-ff''}{2f'}} \\
&= x_n-\alpha-\frac{2ff'}{2f'^2-ff''} \\
&= x_n-\alpha-\frac{h(x_n-\alpha)^m(2mh+2h'(x_n-\alpha))}{(m^2h^2+mh^2)(x_n-\alpha)^{m-1}+2mhh'(x_n-\alpha)^m+(2h'^2-hh'')(x_n-\alpha)^{m+1}} \\
&= x_n-\alpha-\frac{h(2mh+2h'(x_n-\alpha))(x_n-\alpha)}{m^2h^2+mh^2+2mhh'(x_n-\alpha)+(2h'^2-hh'')(x_n-\alpha)^2} \\
&= x_n-\alpha-\frac{2mh^2}{m^2h^2+mh^2}(x_n-\alpha) \\
&= \left(1-\frac{2mh^2}{m^2h^2+mh^2}\right)(x_n-\alpha) \\
&= \frac{m-1}{m+1}(x_n-\alpha) \\
&= \left(1-\frac{2}{m+1}\right)(x_n-\alpha)
\end{aligned}
$$

□

付録１に３次収束のエレガントな別証明を与える．定理2.3の証明と対比させてみるのも興味あることであろう．

定理2.4.　*THMH*法は，αが$f(x)=0$の単根で，x_nがαの近傍のとき，実数定数$q(\neq 0)$に対して次の３次収束の近似をする．

$$
x_{n+1}-\alpha \fallingdotseq \frac{\left(\begin{array}{l}\dfrac{1}{4}f''(\alpha)^2-\dfrac{1}{6}f'(\alpha)\left(f'''(\alpha)+(2q-1)(q-1)f'(\alpha)\right) \\ +\dfrac{(q-1)^2}{4\alpha^2}f'(\alpha)^2-\dfrac{(q-1)f'(\alpha)f''(\alpha)}{\alpha}\end{array}\right)}{f'(\alpha)^2}(x_n-\alpha)^3
$$

αが $m(\geqq 2)$ 重根で，x_n が α の近傍のとき

$$x_{n+1}-\alpha \fallingdotseq \left(1-\frac{2}{m+1}\right)(x_n-\alpha)$$

となり，１次収束の近似をする．

証明　$x^q=t$, $g(t)=f(t^{1/q})=f(x)$ と $g(t)$ を定義した．α が $f(x)=0$ の単根のとき，α^q は $g(t)$ の単根となる．$g(t)$ に関するHalley法は，$t=\alpha^q$ が単根のとき次の３次収束をする．

$$t_{n+1}-\alpha^q \fallingdotseq \frac{\frac{1}{4}g''(\alpha^q)^2-\frac{1}{6}g'(\alpha^q)g'''(\alpha^q)}{g'(\alpha^q)^2}(t_n-\alpha^q)^3$$

ここで，この式の有理式にある $g', g'^2, g'', g''^2, g''', g'g'''$ などを計算して求める．

$$g'=f'\frac{dx}{dt}=f'\frac{1}{qx^{q-1}}$$
$$g'^2=\frac{1}{q^2}f'^2\frac{1}{x^{2(q-1)}}$$

$$g''=\frac{1}{q^2}\left(f''x^{-(2q-2)}-(q-1)f'x^{-(2q-1)}\right)$$
$$g''^2=f''^2\frac{1}{q^4}\frac{1}{x^{2(2q-2)}}-2f''\frac{1}{q^2}\frac{1}{x^{2q-2}}f'\frac{q-1}{q^2}\frac{1}{x^{2q-1}}+f'^2\frac{(q-1)^2}{q^4}\frac{1}{x^{2(2q-1)}}$$

$$g'''=\frac{1}{q^3}\left((f'''+(2q-1)(q-1)f')x^{-3(q-1)}-(3q-3)f''x^{-(3q-2)}\right)$$
$$g'g'''=\frac{1}{q^4}f'\left((f'''+(2q-1)(q-1)f')\frac{1}{x^{4q-4}}-(3q-3)\frac{f''}{x^{4q-3}}\right)$$

したがって

$$\frac{1}{4}g''^2-\frac{1}{6}g'g'''=\frac{1}{4}\frac{(q-1)^2}{q^4}f'^2\frac{1}{x^{4q-2}}-\left(\frac{1}{2}\frac{q-1}{q^4}+\frac{1}{6}\frac{1}{q^4}(3q-3)\right)\frac{f'f''}{x^{4q-3}}$$
$$+\frac{1}{q^4}\left(\frac{1}{4}f''^2-\frac{1}{6}f'\left(f'''+(2q-1)(q-1)f'\right)\right)\frac{1}{x^{4q-4}}$$

$$\frac{\frac{1}{4}g''^2-\frac{1}{6}g'g'''}{g'^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}\frac{(q-1)^2}{q^2}f'^2\frac{1}{x^{2q}}-\frac{1}{q^2}(q-1)f'f''\frac{1}{x^{2q-1}}+\frac{1}{q^2}\left(\frac{1}{4}f''^2-\frac{1}{6}f'\left(f'''+(2q-1)(q-1)f'\right)\right)\frac{1}{x^{2q-2}}}{f'^2}$$

$$x_{n+1}^q-\alpha^q=\frac{\left(\begin{array}{l}\frac{1}{4}\frac{(q-1)^2}{q^2}f'^2\frac{1}{x^{2q}}-\frac{1}{q^2}(q-1)f'f''\frac{1}{x^{2q-1}}\\+\frac{1}{q^2}\left(\frac{1}{4}f''^2-\frac{1}{6}f'\left(f'''+(2q-1)(q-1)f'\right)\right)\frac{1}{x^{2q-2}}\end{array}\right)}{f'^2}(x_n^q-\alpha^q)^3$$

となる．ここで定理2.2より

$$x_{n+1}^q-\alpha^q=q\alpha^{q-1}(x_{n+1}-\alpha),\quad x_n^q-\alpha^q=q\alpha^{q-1}(x_n-\alpha)$$

であるから，上の式は

$$q\alpha^{q-1}(x_{n+1}-\alpha)=\frac{\left(\begin{array}{l}\frac{1}{4}\frac{(q-1)^2}{q^2}f'^2\frac{1}{x^{2q}}-\frac{1}{q^2}(q-1)f'f''\frac{1}{x^{2q-1}}\\+\frac{1}{q^2}\left(\frac{1}{4}f''^2-\frac{1}{6}f'\left(f'''+(2q-1)(q-1)f'\right)\right)\frac{1}{x^{2q-2}}\end{array}\right)}{f'^2}(q\alpha^{q-1})^2q\alpha^{q-1}(x_n-\alpha\ )^3$$

となる．ここで $x=\alpha$ とおくと求める３次収束の式が得られる．

m重根の場合

$$t_{n+1}-\alpha^q\fallingdotseq\left(1-\frac{2}{m}\right)(t_n-\alpha^q)$$

$$x_{n+1}^q-\alpha^q\fallingdotseq\left(1-\frac{2}{m}\right)(x_n^q-\alpha^q)$$

$$x_{n+1}-\alpha\fallingdotseq\left(1-\frac{2}{m}\right)(x_n-\alpha)$$

を得る．　□

今まで３次収束，１次収束の式は，q が整数のときに $x_n^q-\alpha^q$ の因数分解を利用して導いた．しかし定理2.2の式を導いたことにより，q が実数まで拡張された．このことにより数値計算の範囲が広がり考察も広がる．

定理2.5.　αを$f(x)=0$の単根とする．x_nがαの近傍のとき，

$$q=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\alpha^2-3}\left(1.5+\frac{12\alpha f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)$$

より得られる実数 q に対して，q乗の$THMH$法とHalley法の収束の速さは等しい．

証明　Halley法の３次収束の $(x_n - \alpha)^3$ の係数＝$THMH$法の３次収束の $(x_n - \alpha)^3$ の係数より

$$\frac{1}{4}f''(\alpha)^2 - \frac{1}{6}f'(\alpha)f'''(\alpha)$$
$$= \frac{(1-q)^2}{4\alpha^2}f'(\alpha)^2 + \frac{(1-q)f'(\alpha)f''(\alpha)}{\alpha} + \frac{1}{4}f''(\alpha)^2 + \frac{1}{6}f'(\alpha)\left(f'''(\alpha) + (2q-1)(1-q)f'(\alpha)\right)$$

を得る．ここで $f'(\alpha) \neq 0$，$q-1 \neq 0$ として纏めると

$$\frac{1}{6}f'(\alpha)(2q-1) + \frac{1-q}{4\alpha^2}f'(\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{\alpha} = 0$$

を得る．これより q の表示式を得る．　□

系2.6.　$f''(\alpha) = 0$ のとき q は次式となる．

$$q = \frac{1}{2} - \frac{1.5}{4\alpha^2 - 3}$$

また $\alpha = 0$ なら，$q = 1$ となる．

定理2.7.　$f(x) = \sin x = 0$, $f(x) = \tan x = 0$ の q乗の$THMH$法とHalley法の，根 $\pm n\pi$ (n=1,2,・・・) に収束する速さがほぼ等しい q の範囲は次式となる．

$$\frac{1}{2} - \frac{1.5}{4\pi^2 - 3} \leq q < \frac{1}{2}$$

$f(x) = \cos x = 0$ の q乗の$THMH$法とHalley法の，根$\pm\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi$ に収束する速さがほぼ等しい q の範囲は次式となる．

$$\frac{1}{2} - \frac{1.5}{\pi^2 - 3} \leq q < \frac{1}{2}$$

証明　系2.6の式から直ぐに得られる．　□

３．*THMH*法の収束比較式Ｉ（等式の場合）の数値計算

基本的な２次関数(例１，２)，３次関数(例３，４)，初等関数(例５ $\sin x$, 例６ $\cos x$, 例７ $\tan x$, 例８ $\exp x$, 例９ $\ln x$)の方程式について，定理2.5の q の公式に関する数値計算を行う．

数値計算は表計算ソフトExcelを用いる．

例１．$f(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2=0$

q乗の$THMH$法とHalley法の収束の速さがほぼ等しいqは次式より得られる．

$$q=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12xf''(x)}{f'(x)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12x\cdot 2}{2x-3}\right)$$

$x=1$ のとき $q=23$ となる．計算結果は次表である．

初期値 $x_0=0.979$，1.00443 のとき，$q=1$ のHalley法と $q=22$，23 の$THMH$法は共に反復回数 $k=2$ で根１に収束する．しかし，$q=21$，24では，$q=21$, $x_0=1.00443$ のとき $k=2$ であるが，これ以外は全て $k=3$ となり $q=1$，22，23の $k=2$ より１多い．これは理論を裏付ける結果であることを示唆している．

$x=2$ のとき $q=-43/13$ となる．計算結果は右表である．初期値 $x_0=1.998904$，2.0011のとき $q=1$ のHalley法と $q=-43/13$ の $THMH$法は共に $k=2$ で根 2 に収束する．しかし，$q=-3.4,-3.2$では，初期値が同じでも $k=3$ で根 2 に収束していて，$q=1$，-3.3077の $k=2$ より 1 多い．

$x=1$

x_0 \ q	21	1,22,23	24
0.979	3	2	3
1.00443	2	2	3

$x=2$

x_0 \ q	-3.4	$1,-43/13$	-3.2
1.998904	3	2	3
2.0011	3	2	3

例２．$f(x)=x^2-2=0$

$$q=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12xf''(x)}{f'(x)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{13.5}{4x^2-3}$$

ここで，$x=\pm\sqrt{2}$ のとき $q=-2.2$となる．

$x=\sqrt{2}$ のときの計算結果初期値が表のとき，$q=1$ のHalley法と $q=-2.2$ の$THMH$法は共に $k=2$ で根 $\sqrt{2}$ に収束する．しかし $q=-2.1$では $k=3$ であり，$q=1$，-2.2の $k=2$ より１回多い．さらに $q=-3.68$〜-2.2 および $q=-3.69$ では表のようになる．

$x=2$ ^ 0.5

x_0 \ q	-3.69	-3.68〜$-2.2,1$	-2.1
1.41039286	2	2	3
1.418038334	3	2	3

$x=-\sqrt{2}$ で $q=-2.2$（－の小数）のとき，Excelでは#NUM！となり計算できない．

例３．$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6=0$

$$q=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12xf''(x)}{f'(x)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12x(6x-12)}{3x^2-12x+11}\right)$$

$x=1$ のとき $q=35$ となる．
$x_0=0.987,\ 1.03$ で $q=1$〜36 のとき $k=2$ で根 1 に収束する．
しかし，$q=37$ では $k=3$ となり 1 回多い．

$x=1$

x_0 ＼ q	1〜36	37
0.987	2	3
1.03	2	3

$x=2$ のとき $q=5/13=0.384615385$ となる．
$x_0=1.54238836,\ 2.335$ で $q=5/13,\ 1$ のとき $k=3$ で根 2 に収束する．しかし $q=2$ のとき $k=4$ で 2 に収束し 1 多い．

$x=2$

x_0 ＼ q	0.384615385, 1	2
1.54238836	3	4
2.335	3	4

$x=3$ のとき $q=-31/11=-2.818181818$ となる．$x_0=2.6,\ 3.6$ のように小数の桁数を少なくして，初期値の範囲を $3.6-2.6=1$ と広く取ると，$q=-31/11$，1〜9，$q=-31/11$，1〜15 のとき $k=5$ で根 3 に収束する．

$x=3$

x_0	q	k
2.6	−2.818181818, 1〜9	5
2.6	−2.818181818, 1〜15	5

例４．1673年の村瀬義益［8］の囲炉裏の太さ x を求める方程式

$$f(x)=x^3-14x^2+48=0$$

根は $x=2,\ 6\pm2\sqrt{15}$ である．$x=2$ だけ調べる．

$$q=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12xf''(x)}{f'(x)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12x(6x-28)}{3x^2-28x}\right)$$

$x=2$ のとき $q \fallingdotseq -0.286713287$ となる．

$x_0=1.15969$（2.379620022 resp.），$q=-1\sim1$（$q=-6\sim6$ resp.）のとき $k=3$ で根 2 に収束する．しかし $q=-2,\ 2$（$q=-7,\ 7$ resp.）のとき $k=4$ で 2 に収束し反復回数が 1 多い．

$x=2$

x_0	q	k	q	k
1.15969	−1, −0.286713287, 1	3	−2, 2	4
2.37962	−6～−0.286713287, 1～6	3	−7, 7	4

例５．$f(x)=\sin x=0$

$$q=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12xf''(x)}{f'(x)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12x\cdot-\sin x}{\cos x}\right)$$

根は $x=\pm n\pi$ であるから，q は次式となる．

$$q=\frac{1}{2}-\frac{1.5}{4x^2-3}$$

$x=\pi$ のとき，$q \fallingdotseq 0.458879795$ となる．

$x_0=2.8,\ 3.5$，$q=0.458879795,\ 1$ のとき $k=3$ で根 π に収束する．しかし $q=-1,\ 2$ のとき反復回数が 3 より多いか振動する．

$x=10\pi$ のとき，$q \fallingdotseq 0.499619757$ となり 0.5 に近くなる．

$x=\pi$

x_0	q	k	q	k	q	k
2.8	−1	5	0.458879795, 1	3	2	4
3.5	−1	振動	0.458879795, 1	3	2	4

$x=10\pi$

x_0	q	k	q	k	q	k
31.19214355	0.499619633	4	0.499619757, 1～51	3	52	4
31.47727349	0.499619633	3	0.499619757, 1～9	2	10	3

$x_0=31.19214355$，$q=0.499619757$，1～51のとき $k=3$ で根10πに収束する．しかし $q=0.499619633$，52のとき $k=4$ となる．$x_0=31.47727349$，$q=0.499619757$，1～9 のとき$k=2$ で根10πに収束する．しかし $q=0.499619633$，10のとき $k=3$ となり，反復回数が 1 多い．

例６．$f(x)=\cos x=0$

$$q=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12xf''(x)}{f'(x)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12x\cdot-\cos x}{-\sin x}\right)$$

根は $x=\pm(0.5+n)\pi$ であるから，q は次式となる．

$$q=\frac{1}{2}-\frac{1.5}{4x^2-3}$$

$x=\pi/2$ のとき，$q\fallingdotseq 0.281646815$となる．

$x=\pi/2$

x_0	q	k	q	k
1.2238779	−3〜−1, 0.281646815, 1〜6	3	−5, −4, 7	4
1.892182	0.281646815, 1〜6	3	−5〜−1, 7	4

$x_0=1.2238779$（1.892182 resp.），$q=-3$〜-1，0.281646815，1〜6（0.281646815，1〜6 resp.）のとき $k=3$ で根$\pi/2$ に収束する．しかし $q=-5$，-4，7（-5〜-1，7 resp.）のとき $k=4$ で $\pi/2$ に収束する．

$x=10.5\pi$ のとき，$q\fallingdotseq 0.499655132$ となり 0.5 に近づく．計算結果は次表になる．

$x=(0.5+10)\pi$

x_0	q	k	q	k	q	k
32.927169	0.11〜0.499651	3	0.499655132, 1〜202	2	203	#NUM!
33.0387145	0.1〜0.499655	3	0.499655132, 1〜202	2	203	#NUM!

$q=0.499655132$，1〜202 のときは $k=2$ で根に収束する．しかし 0.499655132 より僅かに小さい $q=0.499651$, 0.499655 のときは $k=3$ で根に収束する．$q=203$ のときは#NUM!となる．

例７．$f(x)=\tan x=0$

$$q=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12xf''(x)}{f'(x)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12x\cdot 2\sin x}{\cos x}\right)$$

根は $x=\pm n\pi$ であるから，qは次式となる．

$$q=\frac{1}{2}-\frac{1.5}{4x^2-3}$$

$x=\pi$ のとき，$q\fallingdotseq 0.458879795$ となる．$x_0=3$，3.3，$q=0.458879795$，1～6 のとき $k=3$ で根 π に収束する．$x_0=3$（3.3 resp.），$q=7$～10（7～11 resp.）のとき $k=2$ で根 π に収束し，$q=0.458879795$，1～6 より 1 回速い．$q=-1$ のとき，$k=3$（4 resp.）で根 π に収束する．

$x=10\pi$ のとき，$q\fallingdotseq 0.499619757$ となり 0.5 に近くなる．$x_0=31.381411$，31.49005，$q=0.499619757$，1～205 のとき $k=2$ で根 10π に収束する．$q=0.499619756$ のとき $k=3$ となり 1 多くなる．$q=206$ のとき #NUM! となる．

$x=\pi$

x_0	q	k	q	k	q	k
3	−1	3	0.458879795, 1～6	3	7～10	2
3.3	−1	4	0.458879795, 1～6	3	7～11	2

$x=10\pi$

x_0 \ q	0.499619756	0.499619757, 1～205	206
31.381411	3	2	#NUM!
31.49005	3	2	#NUM!

例８．（1）　$f(x)=\exp x-1=0$

$$\begin{aligned}q&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12xf''(x)}{f'(x)}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12x\exp x}{\exp x}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+12x\right)\end{aligned}$$

根は $x=0$ であり $q=1$ となる．

（2）　$f(x)=\exp x-2=0$

$$\begin{aligned}q&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12xf''(x)}{f'(x)}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12x\cdot\exp x}{\exp x}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+12x\right)\end{aligned}$$

根は $x=\ln 2 \fallingdotseq 0.693147181$ であり，
このとき $q \fallingdotseq 9.605802236$ となる．計算結果は右表である．

$x=\ln 2=0.693147181$

x_0 \ q	1～9, 9.605802236	10
0.689579	2	3
0.696695	2	3

例９．$f(x)=\ln x=0$

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12xf''(x)}{f'(x)}\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4x^2-3}\left(1.5+\frac{12x\cdot -x^{-2}}{x^{-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{10.5}{4x^2-3}
\end{aligned}
$$

根は $x=1$ であり $q=11$ となる．
計算結果は右表である．

$x=1$

x_0	q	k	q	k
0.926107151	1～15	3	16	4
1.16098058	1～11	4	12	#NUM!

付録１．http://en.wikipedia.org/wiki/Halley's_method
にあるHalley法の３次収束の証明を行間を補って紹介する．

$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)\neq 0$ とする．すなわち α は $f(x)=0$ の単根である．Taylor の定理により

$$0=f(\alpha)=f(x_n)+f'(x_n)(\alpha-x_n)+\frac{f''(x_n)}{2}(\alpha-x_n)^2+\frac{f'''(\xi)}{6}(\alpha-x_n)^3$$

そしてまた

$$0=f(\alpha)=f(x_n)+f'(x_n)(\alpha-x_n)+\frac{f''(\eta)}{2}(\alpha-x_n)^2$$

を得る．ここで ξ と η は α と x_n の間の数である．最初の方程式に $2f'(x_n)$ を掛け，それから第２の方程式に $f''(x_n)(\alpha-x_n)$ を掛けたものを引くと次式を得る．

$$
\begin{aligned}
0 &= 2f(x_n)f'(x_n) + 2[f'(x_n)]^2(\alpha - x_n) + f'(x_n)f''(x_n)(\alpha - x_n)^2 \\
&+ \frac{f'(x_n)f'''(\xi)}{3}(\alpha - x_n)^3 - f(x_n)f''(x_n)(\alpha - x_n) - f'(x_n)f''(x_n)(\alpha - x_n)^2 \\
&- \frac{f''(x_n)f''(\eta)}{2}(\alpha - x_n)^3
\end{aligned}
$$

これを整理して次式を得る．

$$
\begin{aligned}
0 &= 2f(x_n)f'(x_n) + \Big(2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)\Big)(\alpha - x_n) \\
&+ \left(\frac{f'(x_n)f'''(\xi)}{3} - \frac{f''(x_n)f''(\eta)}{2}\right)(\alpha - x_n)^3
\end{aligned}
$$

$2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)$ で両辺を割ると

$$
\alpha - x_n = \frac{-2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} - \frac{2f'(x_n)f'''(\xi) - 3f''(x_n)f''(\eta)}{6\Big(2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)\Big)}(\alpha - x_n)^3
$$

を得る．ここで

$$
\begin{aligned}
& x_n - \frac{2f(x_n)f\ (x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \\
&= x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - \frac{1}{2}f(x_n)f''(x_n)} \\
&= x_{n+1}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\alpha - x_{n+1} = -\frac{2f'(x_n)f'''(\xi) - 3f''(x_n)f''(\eta)}{12[f'(x_n)]^2 - 6f(x_n)f''(x_n)}(\alpha - x_n)^3
$$

ここで $x_n \to \alpha$ とすると

$$
\alpha - x_{n+1} = -\frac{2f'(\alpha)f'''(\alpha) - 3f''(\alpha)f''(\alpha)}{12[f'(\alpha)]^2}(\alpha - x_n)^3
$$

となり，求める３次収束の式を得る．　□

前の証明ではHalley法を元にして多数のTaylorの定理を当てはめて３次収束を導いた．これは自然な証明方法である．しかし計算量が多く複雑になり計算ミスのおそれがある．別証明は２次，３次までの２つのTaylorの定理の式からHalley法を導きこれから３次収束を導いている．これは

計算量も少なくミスも少ない.

２．沖方丁（うぶかたとう，1977－　）著『天地明察』角川文庫という小説は，2010年の本屋大賞１位に輝いたベストセラー小説である．2012年９月に映画化もされた．ご存知の方も多くいるであろう．主人公は著名な渋川春海（1639－1715）であり，江戸時代前期の囲碁師，天文学者，暦学者，和算家である．この小説に春海の妻えんの兄として村瀬義益が算聖といわれる関孝和と共に多く登場する．既に佐渡出身の村瀬義益は世間で有名人なのである．

参考文献

［１］堀口俊二：Halley法と拡張Halley法（土倉･堀口･村瀬･Halley法）の収束比較式Ｉ（等式の場合），日本数学会年会2014年３月，応用数学分科会講演アブストラクト

［２］堀口俊二：Halley法と拡張Halley法（土倉･堀口･村瀬･Halley法）の収束比較式Ｉ（等式の場合）の数値計算，日本数学会年会2014年３月，応用数学分科会講演アブストラクト

［３］堀口俊二：村瀬義益とニュートンの漸化式より得られる一般漸化式，数理解析研究所講究録1739, 2011, pp. 234-244., 京都大学数理解析研究所

［４］堀口俊二：村瀬義益とニュートン型の拡張漸化式（土倉・堀口法）の数値計算と収束比較条件式，数理解析研究所講究録1787, 2012.4, pp. 254-264., 京都大学数理解析研究所

［５］堀口俊二，金子勉，藤井康生：村瀬義益の濾縁の３次方程式の３つの解法とホーナー法の関連，和算研究所紀要2013.3 No.13, pp. 3-8., 和算研究所

［６］堀口俊二：土倉・堀口・村瀬・Halley法（拡張Halley法）とその収束Ｉ（等式の場合），2013年12月，日本大学理工学部学術講演会予稿集，数学部会，pp. 1267-1268., 日本大学理工学部

［７］土倉保：和算家的発想によるp乗根の求め方，和算研究所紀要2012.3 No. 12, pp. 1-7., 和算研究所

［８］村瀬義益著･西田知己校注：『算法勿憚改』（1673），研成社，1993

［９］鈴木武雄：『和算の成立』，恒星社厚生閣，2007

［10］http://en.wikipedia.org/wiki/Halley's_method

［11］永坂秀子：『計算機と数値解析』，朝倉書店，1980

［12］戸川隼人：『数値計算法』，コロナ社，1981

The formulas Ⅰ (in the case of an equation) to compare the convergence of Halley method and the extended Halley method(Tsuchikura-Horiguchi-Murase-Halley method) and the numerical calculations

Shunji HORIGUCHI

2014年２月
新潟産業大学経済学部紀要　第43号別刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.43　February　2014