# 土倉・堀口法(村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式)から得られる平方根,立方根の冪乗の連分数表示

堀　口　俊　二

2013年6月
新潟産業大学経済学部紀要　第42号別刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.42 June 2013

# 土倉・堀口法(村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式)から得られる平方根,立方根の冪乗の連分数表示

Continued Fraction Presentations of the Powers of Square Root and Cubic Root by the Tsuchikura-Horiguchi's Method(the First Extension Recurrence Formula of Murase Yoshimasu-Newton's type)

堀　口　俊　二
Shunji HORIGUCHI

**要旨**　実数 $a$ の $p$ 乗根を表す方程式

$$f(x)=x^p-a=0$$

を式変形し，これに土倉・堀口法を適用する．これより $p$ 乗根の冪乗の連分数表示を得る（§2 定理6)．さらにこの連分数表示から平方根, 立方根の冪乗の連分数表示を与える（§2 定理7, 定理９)．われわれは §1 の土倉・堀口法（村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式）と連分数の定義から出発する．

## 1．土倉・堀口法（村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式）と連分数

**定義１**　実変数 $x$ の方程式 $f(x)=0$ の解（根）$\alpha$ を近似する漸化式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{1.1}$$

をニュートン法 (1669) あるいはニュートン･ラフソン法 (1690) という．

ニュートン法は現在コンピュータによる数値計算でもっともよく用いられている．1673 年に村瀬義益 (1630 年頃 -1700 年頃 , 佐渡→江戸・下総（現在の千葉県）)[3] は 2 次元の漸化式 $x_k^2$ を 2 種類導き，この数値計算を算盤で平方根を求めながら行った．これはニュートン（1642-1727）よりわずか 4 年後のことであり，式 (1.1) として定式化された 1690 年より 17 年前である．三大数学者の一人と言われるニュートンと同世代にこのような独創的な和算家が約 350 年前に日本にいたのである．われわれは村瀬の 2 次元の漸化式からニュートン法の拡張である次の定義 2 の土倉･堀口 ($TH$) 法を発見した．このことは日本の和算の独創性を示すものであり，和算から現代数学の新しい式を発見した最初の論文であろう．

定義 2（堀口 [1]）$q$ を 0 以外の実数定数とする．実変数 $x$ の方程式 $f(x)=0$ の解（根）$\alpha$ の $q$ 乗 $\alpha^q$ を近似する漸化式

$$x_{k+1}^q = x_k^q - q x_k^{q-1}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{1.2}$$

を土倉･堀口（$TH$）法（2009）あるいは村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式という．特に $q=1$ のときニュートン法になる．

例 3 （1） $a$ を正の実数定数とする．方程式 $f(x)=x^2-a=0$ の解（根）は $\pm\sqrt{a}$ である．この解を求める漸化式はニュートン法を使うと

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k - \frac{x_k - a}{2x_k} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

となる．これはギリシャ時代から知られた漸化式であり，電卓で平方根を求めるプログラムとして利用されている．

(2)　$a$ を実数定数とする．方程式 $f(x)=x^p-a=0$ は $a$ の $p$ 乗根を表す．これにニュートン法を適用すると

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k - \frac{x_k^p - a}{p x_k^{p-1}} \\ &= \frac{1}{p}\left[(p-1)x_k + \frac{a}{x_k^{p-1}}\right] \end{aligned} \tag{1.4}$$

となる．

定義 4　連分数とは，分数の分母にさらに分数が含まれているような分数をいう．すなわち

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}} \tag{1.5}$$

のような形の分数である．特に，$b_1=b_2=b_3=\cdots=1$ のような分子がすべて 1 である場合を正則連分数という．

例５　方程式 $x^2=a$ の解（平方根）を求めるために，次のように式変形する．

$$x^2+x=x+a \tag{1.6}$$

$$x(x+1)=x+a$$

$$x=\frac{x+a}{x+1}$$

$$x=1+\frac{a-1}{x+1} \tag{1.7}$$

これより平方根を求める漸化式

$$x_{k+1}=1+\frac{a-1}{x_k+1} \tag{1.8}$$

を得る．ここで $a=2$，$x_0=1$ とおくと

$$x_1=1+\frac{1}{2}$$

$$x_2=1+\frac{1}{x_1+1}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$$

$$x_3=1+\frac{1}{x_2+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$$

$$x_4=\cdots$$

$$x_5=\cdots$$

となり，正則無限連分数展開となる．

## ２．土倉・堀口法（村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式）から得られる $p$ 乗根の冪乗の連分数表示

定理６

$$g(x)=\frac{x^p-a}{x+1}=0\ (p\neq 1) \tag{2.1}$$

に土倉・堀口法を行うことにより，$a$ の $p(\geqq 2)$ 乗根の $q$ 乗の連分数表示の漸化式

$$x_{k+1}^q=\left(1-\frac{q}{p-1}\right)x_k^q+qx_k^{q-1}\left(\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{p}{(p-1)^2}\frac{1}{(p-1)x_k+p+\frac{a(p-1)^2}{\frac{x_k^{p-1}-a(p-1)x_k+a(-p+2)}{(x_k+1)^2}}}\right) \tag{2.2}$$

$$=\left(1-\frac{2q}{p-1}\right)x_k^q+qx_k^{q-1}\left(\frac{1}{p-1}x_k+\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{p}{(p-1)^2}\frac{1}{(p-1)x_k+p+\cfrac{a(p-1)^2}{\cfrac{x_k^{p-1}-a(p-1)x_k+a(-p+2)}{(x_k+1)^2}}}\right) \tag{2.3}$$

を得る.

証明

$$g(x)=\frac{x^p-a}{x+1}$$

に土倉・堀口法

$$x_{k+1}^q=x_k^q-qx_k^{q-1}\frac{g(x_k)}{g'(x_k)} \tag{2.4}$$

を適用する.

$$\frac{g(x)}{g'(x)}=\frac{\cfrac{x^p-a}{x+1}}{\cfrac{px^{p-1}(x+1)-(x^p-a)}{(x+1)^2}} \tag{2.5}$$

$$=\frac{\cfrac{x^p-a}{x+1}}{\cfrac{(p-1)x^p+px^{p-1}+a}{(x+1)^2}}$$

$$=\frac{x^{p+1}+x^p-ax-a}{(p-1)x^p+px^{p-1}+a}$$

となる. ここで有理式の割算を行い, 式変形する.

$$\frac{1}{p-1}x-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{\cfrac{p}{(p-1)^2}x^{p-1}-\cfrac{ap}{p-1}x+\cfrac{ap(-p+2)}{(p-1)^2}}{(p-1)x^p+px^{p-1}+a} \tag{2.6}$$

$$=\frac{1}{p-1}x-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{\cfrac{(p-1)x^p+px^{p-1}+a}{\cfrac{p}{(p-1)^2}x^{p-1}-\cfrac{ap}{p-1}x+\cfrac{ap(-p+2)}{(p-1)^2}}}$$

$$=\frac{1}{p-1}x-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{\cfrac{(p-1)x^p+px^{p-1}+a}{\cfrac{p}{(p-1)^2}\left(x^{p-1}-a(p-1)x+a(-p+2)\right)}}$$

となる．さらに分母の有理式の割算を行い，式変形する．

$$\frac{(p-1)x^p+px^{p-1}+a}{\frac{p}{(p-1)^2}\left(x^{p-1}-a(p-1)x+a(-p+2)\right)} \tag{2.7}$$

$$=\frac{(p-1)^2}{p}\left[(p-1)x+p+\frac{a(p-1)^2x^2+2a(p-1)^2x+a(p-1)^2}{x^{p-1}-a(p-1)x+a(-p+2)}\right]$$

$$=\frac{(p-1)^2}{p}\left[(p-1)x+p+\frac{1}{\frac{x^{p-1}-a(p-1)x+a(-p+2)}{a(p-1)^2x^2+2a(p-1)^2x+a(p-1)^2}}\right]$$

$$=\frac{(p-1)^2}{p}\left[(p-1)x+p+\frac{a(p-1)^2}{\frac{x^{p-1}-a(p-1)x+a(-p+2)}{(x+1)^2}}\right]$$

となる．したがって

$$\frac{g(x)}{g'(x)}=\frac{1}{p-1}x-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{\frac{(p-1)x^p+px^{p-1}+a}{\frac{p}{(p-1)^2}\left(x^{p-1}-a(p-1)x+a(-p+2)\right)}} \tag{2.8}$$

$$=\frac{1}{p-1}x-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{\frac{(p-1)^2}{p}\left[(p-1)x+p+\frac{a(p-1)^2}{\frac{x^{p-1}-a(p-1)x+a(-p+2)}{(x+1)^2}}\right]}$$

となる．したがって

$$x_{k+1}^q=x_k^q-qx_k^{q-1}\frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$$

$$=x_k^q-qx_k^{q-1}\left[\frac{1}{p-1}x_k-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{\frac{(p-1)^2}{p}\left[(p-1)x_k+p+\frac{a(p-1)^2}{\frac{x_k^{p-1}-a(p-1)x_k+a(-p+2)}{(x_k+1)^2}}\right]}\right] \tag{2.9}$$

となる．これを纏めると求める漸化式 (2.2) を得る．式 (2.3) は式 (2.2) から容易に導かれる　□

$a$ を正の実数定数とする．定理 6 の式 (2.1) において $p=2$ とすると

$$g(x)=\frac{x^2-a}{x+1}=0 \tag{2.10}$$

となり，これは $a$ の平方根を表す方程式である．このとき式 (2.2) から

定理 7　$a$ の平方根の $q$ 乗の連分数表示の漸化式

$$x_{k+1}^q=(1-q)x_k^q+qx_k^{q-1}\left(1+\cfrac{a-1}{1+\cfrac{1}{2}\left(x_k+\cfrac{a}{x_k}\right)}\right) \tag{2.11}$$

を得る．

証明　定理 6 の式 (2.2) で $p=2$ とすると

$$x_{k+1}^q=(1-q)x_k^q+qx_k^{q-1}\left(1-\cfrac{2}{x_k+2+\cfrac{a}{\cfrac{(1-a)x_k}{(x_k+1)^2}}}\right) \tag{2.12}$$

を得る．式 (2.12) から式 (2.11) を導く．式 (2.12) の有理式の部分は

$$\begin{aligned}&\cfrac{2}{-(x_k+2)+\cfrac{a}{\cfrac{(a-1)x_k}{(x_k+1)^2}}}\\&=\cfrac{2}{-(x_k+2)+\cfrac{a(x_k+1)^2}{(a-1)x_k}}\end{aligned} \tag{2.13}$$

となるので，これを式変形すると

$$\cfrac{a-1}{1+\cfrac{1}{2}\left(x_k+\cfrac{a}{x_k}\right)} \tag{2.14}$$

となる．これより求める式が得られる．　□

式(2.11)の分母に例3のニュートン法による漸化式(1.3)があることに注意せよ．

系8　式(2.11)で $q=1$ のとき $a$ の平方根を表し

$$x_{k+1}=1+\frac{a-1}{1+\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)} \tag{2.15}$$

となる．したがって $q$ 乗の漸化式(2.11)は $a$ の平方根の漸化式(2.15)を含んだ式である．

$a$ を実数定数とする．定理6で式(2.1)において $p=3$ とすると

$$g(x)=\frac{x^3-a}{x+1}=0 \tag{2.16}$$

となり，これは $a$ の立方根を表す方程式である．このとき式(2.3)から

定理9　実数 $a$ の立方根の $q$ 乗の連分数表示の漸化式

$$x_{k+1}^q=(1-q)x_k^q+qx_k^{q-1}\left(\frac{1}{2}x_k+\frac{1}{4}-\cfrac{1}{\frac{8}{3}x_k+4+\frac{16a}{3}+\cfrac{1}{\frac{3}{32a(a+1)}\left(x_k-2\left(a+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\cfrac{1}{x_k+\frac{1}{2}}\right)}}\right) \tag{2.17}$$

を得る．

証明　式(2.3)で $p=3$ とすると次式を得る．

$$x_{k+1}^q=\left(1-q\right)x_k^q+qx_k^{q-1}\left(\frac{1}{2}x_k+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\cfrac{1}{2x_k+3+\cfrac{4a}{\frac{x_k^2-2ax_k-a}{(x_k+1)^2}}}\right) \tag{2.18}$$

式(2.18)から式(2.17)を導く．式(2.18)の分母にある有理式は

$$\frac{3}{4}\frac{1}{2x_k+3+\cfrac{4a}{\cfrac{x_k^2-2ax_k-a}{x_k^2+2x_k+1}}}$$

$$=\frac{1}{\frac{8}{3}x_k+4+\frac{16a}{3}\frac{x_k^2+2x_k+1}{x_k^2-2ax_k-a}} \tag{2.19}$$

となり，式 (2.19) の分母にある有理式は

$$\frac{x_k^2+2x_k+1}{x_k^2-2ax_k-a}$$

$$=1+\frac{(a+1)(2x_k+1)}{x_k^2-2ax_k-a} \tag{2.20}$$

となるから

$$(2.19)=\frac{1}{\frac{8}{3}x_k+4+\frac{16a}{3}\left(1+\frac{(a+1)(2x_k+1)}{x_k^2-2ax_k-a}\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{8}{3}x_k+4+\frac{16a}{3}+\frac{16a(a+1)}{3}\frac{2x_k+1}{x_k^2-2ax_k-a}}$$

$$=\frac{1}{\frac{8}{3}x_k+4+\frac{16a}{3}+\cfrac{1}{\cfrac{3}{16a(a+1)}\cfrac{x_k^2-2ax_k-a}{2x_k+1}}} \tag{2.21}$$

となる．ここで式 (2.21) の分母にある有理式は

$$\frac{x_k^2-2ax_k-a}{2x_k+1}$$

$$=\frac{1}{2}x_k-\left(a+\frac{1}{4}\right)+\frac{\frac{1}{4}}{2x_k+1} \tag{2.22}$$

となるから

$$(2.19)=\cfrac{1}{\frac{8}{3}x_k+4+\frac{16a}{3}+\cfrac{1}{\frac{3}{16a(a+1)}\left(\frac{1}{2}x_k-\left(a+\frac{1}{4}\right)+\cfrac{\frac{1}{4}}{2x_k+1}\right)}} \tag{2.23}$$

となる．□

系 10　式 (2.17) は $q=1$ のとき実数 $a$ の立方根を表し

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}x_k+\frac{1}{4}-\cfrac{1}{\frac{8}{3}x_k+4+\frac{16a}{3}+\cfrac{1}{\frac{3}{32a(a+1)}\left(x_k-2\left(a+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\cfrac{1}{x_k+\frac{1}{2}}\right)}} \tag{2.24}$$

となる．したがって $q$ 乗の漸化式 (2.17) は $a$ の立方根の漸化式 (2.24) を含んだ式である．

## 参 考 文 献

[1] 堀口俊二：村瀬義益とニュートンの漸化式より得られる一般漸化式，数理解析研究所講究録 1739, 2011.4, pp. 234-244., 京都大学数理解析研究所
[2] 堀口俊二，鈴木武雄：ニュートン法から得られる平方根，立方根，4 乗根の連分数表示 , 2011.10 日本数学会秋季統合分科会 , 代数学分科会講演アブストラクト , pp. 125-126.
[3] 村瀬義益著・西田知己校注：『算法勿憚改』(1673), 研成社 , 1993
[4] 鈴木武雄：『和算の成立』，恒星社厚生閣，2007
[5] 永坂秀子：『計算機と数値解析』，朝倉書店，1980
[6] 藤野清次：『数値計算の基礎』，サイエンス社，1998

# Continued Fraction Presentations of the Powers of Square Root and Cubic Root by the Tsuchikura-Horiguchi's Method (the First Extension Recurrence Formula of Murase Yoshimasu-Newton's type)

Shunji HORIGUCHI

2013年6月
新 潟 産 業 大 学 経 済 学 部 紀 要　第 42号 別 刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.42 June 2013