ニュートン法の一般化

堀　口　俊　二

2013年2月
新 潟 産 業 大 学 経 済 学 部 紀 要　第 41号別刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.41 February 2013

ニュートン法の一般化

Generalization of Newton's method

堀　口　俊　二
Shunji HORIGUCHI

要旨

§1 はニュートン法を拡張して一般漸化式（拡張ニュートン法）を与える．§2 はその収束条件式を与える．§3 は拡張ニュートン法の例を与える．

1．ニュートン法の拡張

定義 1　$f(x)=0$の根を近似するための漸化式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}(k=0,1,2,\cdots)$$

を**ニュートン法**(1669 年頃ニュートン , 1690 年頃ラフソン) という．

ニュートン法を変数変換により拡張する．関数 $y=f(x)$ に対して，$x=\varphi(u)$とおく．

$$y=g(u):=f(\varphi(u))=f(x)$$

により関数 $g(u)$ を定義する．$y=g(u)$ にニュートン法を行う．

$$\begin{aligned}u_{k+1}&=u_k-\frac{g(u_k)}{g'(u_k)}\\&=u_k-(\varphi'(u_k))^{-1}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad x_k=\varphi(u_k),\quad \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^{-1}=\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

となる (林 [3])．$x_k=\varphi(u_k)$ すなわち $u_k=\varphi^{-1}(x_k)$ より，次の定理の漸化式を得る．

定理 2

$$\varphi^{-1}(x_{k+1})=\varphi^{-1}(x_k)-(\varphi'(\varphi^{-1}(x_k)))^{-1}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

これは $x_k=\varphi(u_k)=u_k$ のときニュートン法となる．

定義 3　定理 2 の変数 x_k の漸化式を拡張ニュートン法あるいはニュートン法の一般漸化式という．

2．拡張ニュートン法（一般ニュートン法）の収束

§1で定義された $y=g(u)$ に関するニュートン法は

$$u_{k+1}=u_k-\frac{g(u_k)}{g'(u_k)}$$

である．$f(\alpha)=0$ とすると，$g(\varphi^{-1}(\alpha))=f(\alpha)=0$ となるから，$\varphi^{-1}(\alpha)$ は $g(u)=0$ の根である．このときニュートン法の収束に関して
$\varphi^{-1}(\alpha)$ が単根のとき

$$|u_{k+1}-\varphi^{-1}(\alpha)|\fallingdotseq\left|\frac{g''(\varphi^{-1}(\alpha))}{2g'(\varphi^{-1}(\alpha))}\right|(u_k-\varphi^{-1}(\alpha))^2$$

となり，2次収束する．$\varphi^{-1}(\alpha)$ が m 重根のとき

$$|u_{k+1}-\varphi^{-1}(\alpha)|<\left(1-\frac{1}{m}\right)|u_k-\varphi^{-1}(\alpha)|$$

となり，1次収束する．2つの式を $x_k, f(x_k)$ に書き直して次の定理を得る.

定理4　漸化式 $\varphi^{-1}(x_{k+1})$ は，$\varphi^{-1}(\alpha)$ が単根のとき

$$|\varphi^{-1}(x_{k+1})-\varphi^{-1}(\alpha)|\fallingdotseq\left|\frac{f''(\alpha)(\varphi'(\varphi^{-1}(\alpha)))^2+f'(\alpha)\varphi''(\varphi^{-1}(\alpha))}{2f'(\alpha)\varphi'(\varphi^{-1}(\alpha))}\right|(\varphi^{-1}(x_k)-\varphi^{-1}(\alpha))^2$$

となり，2次収束する．$\varphi^{-1}(\alpha)$ が m 重根のとき

$$|\varphi^{-1}(x_{k+1})-\varphi^{-1}(\alpha)|<\left(1-\frac{1}{m}\right)|\varphi^{-1}(x_k)-\varphi^{-1}(\alpha)|$$

となり，1次収束する.

3．3つの例

例1　q を0以外の実数定数とする．$x=\varphi(t)=t^{1/q}$ とおくと，$t=\varphi^{-1}(x)=x^q$ であるから，拡張ニュートン法は

$$\begin{aligned}x_{k+1}^q&=x_k^q-(\varphi'(\varphi^{-1}(x_k)))^{-1}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\\&=x_k^q-\frac{dt}{dx}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\\&=x_k^q-qx^{q-1}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\end{aligned}$$

となる．これを**土倉・堀口（*TH*）法**という．とくに $q=1$ のときニュートン法となる．

TH 法の収束を与える．

定理５　α を $f(x)=0$ の根，$q(\neq 0)$ を整数定数とする．$x_n \to \alpha$ のとき，TH法は，α が単根のとき次の２次収束をする．

$$|x_{n+1}^q - \alpha^q| \fallingdotseq \frac{1}{2}\left|\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{1-q}{\alpha}\right) q\alpha^{q-1}\right|(x_n - \alpha)^2$$

α が m 重根のとき $M=(1-1/m)|q\alpha^{q-1}|<1$ なら次の１次収束をする．

$$|x_{n+1}^q - \alpha^q| \leq M|x_n - \alpha|$$

証明　$g(t)=f(t^{1/q})=f(x),\ x^q=t$ である．α が $f(x)=0$ の単根のとき，$t=\alpha^q$ は $g(t)=0$ の単根となる．このとき $g(t)$ に関するニュートン法は次の２次収束となる．

$$|t_{n+1} - \alpha^q| \fallingdotseq \frac{1}{2}\left|\frac{g''(\alpha^q)}{g'(\alpha^q)}\right|(t_n - \alpha^q)^2$$

ここで

$$g'(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \frac{df(x)}{dt}\frac{dx}{dt} = f'(x)\frac{1}{qx^{q-1}},$$

$$g''(t) = \frac{d^2g(t)}{dt^2} = \frac{df'(x)}{dt}\frac{1}{qx^{q-1}} + f'(x)\frac{d}{dt}\frac{1}{qx^{q-1}}$$
$$= f''(x)\frac{1}{q^2}\frac{1}{x^{2q-2}} - f'(x)\left(\frac{q-1}{q^2}\frac{1}{x^{2q-1}}\right)$$

となる．また

$$(t_n - \alpha^q) = (x_n^q - \alpha^q) = (x_n^{q-1} + x_n^{q-2}\alpha + \cdots + x_n\alpha^{q-2} + \alpha^{q-1})(x_n - \alpha)$$

と因数分解されるから，最初の式は

$$|x_{n+1}^q - \alpha^q| \fallingdotseq \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\alpha)\frac{1}{q^2}\frac{1}{\alpha^{2q-2}} - f'(\alpha)\left(\frac{q-1}{q^2}\frac{1}{\alpha^{2q-1}}\right)}{f'(\alpha)\frac{1}{q\alpha^{q-1}}}\right|(x_n^{q-1} + x_n^{q-2}\alpha + \cdots + x_n\alpha^{q-2} + \alpha^{q-1})^2(x_n - \alpha)^2$$

となる．ここで $x_n \fallingdotseq \alpha$ とおくことにより定理の前半の式を得る．

α が $f(x)=0$ の m 重根のとき，$f(x)$ に関するニュートン法は次の１次収束をする．

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \left(1 - \frac{1}{m}\right)|x_n - \alpha|$$

これを$g(t)$に関するニュートン法の１次収束に適用して後半の式を得る. □

定理５の２次収束の式からニュートン法とTH法の収束の速さを比較する十分条件を与える.

定理 6

$$0\leq\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}\frac{q-1}{\alpha}\leq 2$$

を満たす整数qが存在すれば, q乗のTH法がニュートン法より収束が速いか等しい.

証明　定理の式を式変形すると

$$-1\leq 1+\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}\frac{1-q}{\alpha}\leq 1$$

となる. ここで $|q\alpha^{q-1}|\geq 1$ のとき, $1/|q\alpha^{q-1}|\leq 1$ であるから

$$-\frac{1}{|q\alpha^{q-1}|}\leq 1+\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}\frac{1-q}{\alpha}\leq\frac{1}{|q\alpha^{q-1}|}$$

の範囲が得られる. これより

$$\left|\left(\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}+\frac{1-q}{2\alpha}\right)q\alpha^{q-1}\right|\leq\left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$$

を得る. これはTH法がN法より収束が速いか等しいことを示している.

$|q\alpha^{q-1}|\leq 1$のとき, 証明の最初の式より

$$-1\leq\left(1+\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}\frac{1-q}{\alpha}\right)|q\alpha^{q-1}|\leq 1$$

を得る. これより２つ上の不等式が得られる. □

これまで調べた代数方程式の３つ例に対して, $q=2$のときに上の条件を満たし, TH法がニュートン法より収束が速い結果が得られている.

例 2 $x=\varphi(u)=e^u$とおくと, $u=\varphi^{-1}(x)=\log x$, $y=g(u)=f(\varphi(u))=f(e^u)=f(x)$となる. 拡張ニュートン法は

$$u_{k+1}=u_k-\varphi'(u_k)^{-1}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad \varphi'(u)^{-1}=\frac{du}{dx}$$

$$\log x_{k+1}=\log x_k-\frac{1}{x_k}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1}=e^{\log x_k-\frac{1}{x_k}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

となり，漸化式

$$x_{k+1}=x_k e^{-\frac{1}{x_k}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

を得る.

$f(\alpha)=0$ とすると $e^u=\alpha$, $u=\log\alpha$ となり

$$g(\log\alpha)=f(\varphi(\log\alpha))=f(e^{\log\alpha})=f(\alpha)=0$$

となる．漸化式 u_k は $\log\alpha$ が単根のとき次の2次収束をする.

$$u_{k+1}-\log\alpha \fallingdotseq \frac{g''(\log\alpha)}{2g'(\log\alpha)}(u_k-\log\alpha)^2$$

これを x_k に書き直すと次式になる.

$$\frac{x_{k+1}}{\alpha} \fallingdotseq \left(\frac{x_k}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{f''(\alpha)\alpha}{f'(\alpha)}+1\right)\log\left(\frac{x_k}{\alpha}\right)}$$

漸化式 u_k は $\log\alpha$ が m 重根のとき次の1次収束をする.

$$u_{k+1}-\log\alpha \fallingdotseq \left(1-\frac{1}{m}\right)(u_k-\log\alpha)$$

これを x_k に書き直すと次式になる.

$$\frac{x_{k+1}}{\alpha} \fallingdotseq \left(\frac{x_k}{\alpha}\right)^{1-\frac{1}{m}}$$

したがって次の定理を得る.

定理7　$x=\varphi(u)=e^u$ から得られる拡張ニュートン法

$$x_{k+1}=x_k e^{-\frac{1}{x_k}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

は，α が単根のとき次の指数収束をする.

$$\frac{x_{k+1}}{\alpha} \fallingdotseq \left(\frac{x_k}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{f''(\alpha)\alpha}{f'(\alpha)}+1\right)\log\left(\frac{x_k}{\alpha}\right)}$$

α が m 重根のとき次の指数収束をする.

$$\frac{x_{k+1}}{\alpha} \fallingdotseq \left(\frac{x_k}{\alpha}\right)^{1-\frac{1}{m}}$$

定理７の指数収束とニュートン法の２次収束の比較条件は現在のところ得られない．そこでパソコンを使い，$x_{k+1}=x_k e^{-\frac{1}{x_k}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$ とニュートン法の数値計算を行い，両者の収束の速さを比較する．方程式は村瀬義益『算法勿憚改』(1673) にある炉縁の方程式

$$f(x)=x^3-14x^2+48=0$$

を用いる．根は 2, $6\pm 2\sqrt{3}$ である．

数値計算は Excel で行い，標準 10 桁で出力する．

以下に初期値を－2，1.5，10 としたときの数値計算の 3 組 (6 つ) の表を与える．初期値が－2 のときは，両者の反復回数は 4 回で同じである．初期値が 1.5 のときは，ニュートン法は 4 回であるが，拡張ニュートン法は 5 回である．初期値が 10 のときは，ニュートン法は 8 回であるが，拡張ニュートン法は 11 回である．

x=φ(u)=exp(u)　f(x)=x^3-14x^2+48=0

	x_k	$(1/x_k)f(x_k)/f'(x_k)$	x_{k+1}
0	-2	0.117647059	-1.778019531
1	-1.778019531	0.01783909	-1.746582518
2	-1.746582518	0.000352517	-1.745966927
3	-1.745966927	1.3413E-07	-1.745966692
4	-1.745966692	1.94953E-14	-1.745966692
5	-1.745966692	-1.40254E-16	-1.745966692
6	-1.745966692	2.10381E-16	-1.745966692
7	-1.745966692	-1.40254E-16	-1.745966692
8	-1.745966692	2.10381E-16	-1.745966692
9	-1.745966692	-1.40254E-16	-1.745966692
10	-1.745966692	2.10381E-16	-1.745966692

ニュートン法　f(x)=x^3-14x^2+48=0

	x_k	$f(x_k)/f'(x_k)$	x_{k+1}
0	-2	-0.235294118	-1.764705882
1	-1.764705882	-0.018623987	-1.746081896
2	-1.746081896	-0.000115199	-1.745966697
3	-1.745966697	-4.39936E-09	-1.745966692
4	-1.745966692	-1.22439E-16	-1.745966692
5	-1.745966692	2.44879E-16	-1.745966692
6	-1.745966692	-1.22439E-16	-1.745966692
7	-1.745966692	2.44879E-16	-1.745966692
8	-1.745966692	-1.22439E-16	-1.745966692
9	-1.745966692	2.44879E-16	-1.745966692
10	-1.745966692	-1.22439E-16	-1.745966692

x=φ(u)=exp(u)　f(x)=x^3-14x^2+48=0

	x_k	$(1/x_k)f(x_k)/f'(x_k)$	x_{k+1}
0	1.5	-0.375886525	2.184422809
1	2.184422809	0.081890125	2.01266861
2	2.01266861	0.006280047	2.000068561
3	2.000068561	3.42789E-05	2.000000002
4	2.000000002	1.01485E-09	2
5	2	0	2
6	2	0	2
7	2	0	2
8	2	0	2
9	2	0	2
10	2	0	2

ニュートン法　f(x)=x^3-14x^2+48=0

	x_k	$f(x_k)/f'(x_k)$	x_{k+1}
0	1.5	-0.563829787	2.063829787
1	2.063829787	0.063117179	2.000712608
2	2.000712608	0.000712516	2.000000092
3	2.000000092	9.22888E-08	2
4	2	1.2919E-15	2
5	2	0	2
6	2	0	2
7	2	0	2
8	2	0	2
9	2	0	2
10	2	0	2

x=φ(u)=exp(u)　f(x)=x^3-14x^2+48=0

	x_k	$(1/x_k)f(x_k)/f'(x_k)$	x_{k+1}
0	10	-1.76	58.12437394
1	58.12437394	0.301548407	42.99297311
2	42.99297311	0.287376234	32.25459301
3	32.25459301	0.26613911	24.7177434
4	24.7177434	0.233923116	19.56218227
5	19.56218227	0.185345514	16.25259703
6	16.25259703	0.117272309	14.45413314
7	14.45413314	0.044516744	13.82479419
8	13.82479419	0.005635792	13.74709967
9	13.74709967	8.24017E-05	13.74596693
10	13.74596693	1.73696E-08	13.74596669

ニュートン法　f(x)=x^3-14x^2+48=0

	x_k	$f(x_k)/f'(x_k)$	x_{k+1}
0	10	-17.6	27.6
1	27.6	6.881370993	20.71862901
2	20.71862901	4.143283919	16.57534509
3	16.57534509	2.09808648	14.47725861
4	14.47725861	0.66259005	13.81466856
5	13.81466856	0.068006157	13.7466624
6	13.7466624	0.000695635	13.74596676
7	13.74596676	7.24377E-08	13.74596669
8	13.74596669	0	13.74596669
9	13.74596669	0	13.74596669
10	13.74596669	0	13.74596669

例 3　$x=\varphi(u)=\sin^{-1}u$ とおくと，$u=\varphi^{-1}(x)=\sin x$ であり，

$$y=g(u)=f(\varphi(u))=f(\sin^{-1}u)=f(x)$$

となる．拡張ニュートン法は

$$u_{k+1}=u_k-\varphi'(u_k)^{-1}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad \varphi'(u)^{-1}=\frac{du}{dx}=\cos x$$

$$\sin x_{k+1}=\sin x_k-\cos x_k\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

となる．しかし $-1\leq\sin x_{k+1}\leq 1$ でなければならないので，このような範囲でしか使用できない．例 1 ～例 3 でみたように関数 $x=\varphi(u)$ の選び方が問題になる．

謝辞　元金沢学院大学教授 林　有一氏からご教示を頂きました．ここに厚く御礼申し上げます．

参 考 文 献

[1] 堀口俊二：ニュートン法の一般化，日本数学会 2012 年度年会 3 月 , 応用数学分科会講演アブストラクト , pp. 85-87.

[2] 堀口俊二：村瀬義益・ニュートン型の拡張漸化式 (土倉・堀口法) の数値計算と収束比較条件式，京都大学数理解析研究所講究録 1787，2012 年 4 月 , pp. 254-264.

[3] 林　有一：算法勿憚改の反復法について，第 36 回応用数学研究集会 (福岡教育大学)，2011 年 8 月 27 日

[4] 村瀬義益著・西田知己校注：『算法勿憚改』(1673), 研成社 , 1993

[5] 鈴木武雄：『和算の成立』, 恒星社厚生閣 , 2004

[6] 永坂秀子：『計算機と数値計算』，朝倉書店，1980

[7] 戸川隼人：『数値計算法』，コロナ社，1981

[8] 山本哲朗：『数値解析入門 [増訂版]』，サイエンス社，1976

[9] 森正武・室田一雄・杉原正顕：『数値計算の基礎』，岩波書店，1993

Generalization of Newton's method

Shunji HORIGUCHI

2013年2月
新潟産業大学経済学部紀要　第41号別刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.41 February 2013