累乗根を表すいろいろな方程式の土倉・堀口法 (村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式) の収束比較

堀　口　俊　二

2013年2月
新潟産業大学経済学部紀要　第41号別刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.41 February 2013

累乗根を表すいろいろな方程式の土倉・堀口法 (村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式) の収束比較

Comparisons of convergence of the Tsuchikura-Horiguchi method (the first extension recurrence formula of Murase Yoshimasu-Newton's type) of various equation which represent radical roots

堀　口　俊　二
Shunji HORIGUCHI

要旨

和算にはニュートン法 (1669 年頃ニュートン ,1690 年頃ラフソン) の拡張と見られる村瀬義益の漸化式の研究 (1673) がある．この村瀬の漸化式から，村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式 (土倉・堀口法) が得られる (2010)．そこで本稿では p 乗根を求めるいろいろな方程式の関数に土倉・堀口法を適用して，これらの漸化式の収束比較を行う．本稿は和算が現代数学に繋がり，その中で生きている一例であり，さらに日本の数学の独創性を示すものである．算盤しかなかった江戸時代と違い，現在はパソコンにより，容易に数値計算の実験，研究が出来る．ニュートンや江戸時代の和算家たちが知ったらどのような感想をもつであろうか？

1．土倉・堀口法 (*TH* 法)(村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式)

村瀬義益『算法勿憚改』(1673) に炉縁の体積から直方体の太さ x を求める問題がある．村瀬は x の 3 次方程式を作り, これから 2 つの 2 次元の x^2 の漸化式を導いて, 算盤で平方根を求めながら, 4, 5 回の反復計算をして根を求めている．算盤しかなかった時代にこのような計算は大変だっただろう．堀口 [5] は村瀬の漸化式からニュートン法の拡張の漸化式を次のように発見する．

土倉・堀口 (*TH*) 法の導出とグラフ

TH 法と接線 $y=f(x)$ を $x^q=t$ (q は 0,1 でない実数) により変換した関数を $y=g(t)$ とする．

$$g(t) := f(t^{1/q}) = f(x) \tag{1.1}$$

この関数は $g(x^q)=f(x)$ となるから, $y=f(x)$ を高さは変えないで x 軸方向に $x^q=t$ だけ伸縮したグラフとなる．$g(t)=0$ の $g(t)$ にニュートン法を適用すると,

$$t_{n+1} = t_n - \frac{g(t_n)}{g'(t_n)} \tag{1.2}$$

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n^{1/q})}{f'(t_n^{1/q})\,{}^1\!/_q\, t_n^{1/q-1}} \tag{1.3}$$

となる．これを $x^q=t$ により変数 x にもどすと漸化式

$$x_{n+1}^q=x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ (n=0,1,2,\cdots) \tag{1.4}$$

を得る．これは $y=g(t)$ のグラフの点 $(t_n, g(t_n))$ における接線の t 軸との交点 t_{n+1} を意味する．

定義１　q を 0 以外の実数定数とする．実変数 x についての方程式 $f(x)=0$ の解（根）α の q 乗 α^q を近似するための漸化式（1.4）を土倉・堀口（*TH*）法（あるいは村瀬義益・ニュートン型の第一拡張漸化式）（2010）という．これは $q=1$ のときニュートン法（1669 年頃ニュートン ,1690 年頃ラフソン）になる．

TH 法の計算は

$$x_{n+1}=\left[x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]^{\frac{1}{q}} \tag{1.5}$$

で行う．反復回数は n でカウントする．

定理２　α は $f(x)=0$ の根，$q(\neq 0)$ を整数定数とする．$x_n\to\alpha$ のとき，*TH* 法は，α が単根のとき次の 2 次収束をする．

$$|x_{n+1}^q-\alpha^q|\fallingdotseq\frac{1}{2}\left|\left(\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}+\frac{1-q}{\alpha}\right)q\alpha^{q-1}\right|(x_n-\alpha)^2 \tag{1.6}$$

α が m 重根のとき $M=(1-1/m)|q\alpha^{q-1}|<1$ なら次の 1 次収束をする．

$$|x_{n+1}^q-\alpha^q|\leq M|x_n-\alpha| \tag{1.7}$$

証明　$g(t)=f(t^{1/q})=f(x)$, $x^q=t$ である．α が $f(x)=0$ の単根のとき，$t=\alpha^q$ は $g(t)=0$ の単根となる．このとき $g(t)$ に関するニュートン法は次の 2 次収束となる．

$$|t_{n+1}-\alpha^q|\fallingdotseq\frac{1}{2}\left|\frac{g''(\alpha^q)}{g'(\alpha^q)}\right|(t_n-\alpha^q)^2 \tag{1.8}$$

ここで

$$g'(t)=\frac{dg(t)}{dt}=\frac{df(x)}{dt}\frac{dx}{dt}=f'(x)\frac{1}{qx^{q-1}},$$

$$g''(t)=\frac{d^2g(t)}{dt^2}=\frac{df'(x)}{dt}\frac{1}{qx^{q-1}}+f'(x)\frac{d}{dt}\frac{1}{qx^{q-1}}$$

$$=f''(x)\frac{1}{q^2}\frac{1}{x^{2q-2}}-f'(x)\left(\frac{q-1}{q^2}\frac{1}{x^{2q-1}}\right)$$

となる．また

$$(t_n-\alpha^q)=(x_n^q-\alpha^q)=(x_n^{q-1}+x_n^{q-2}\alpha+\cdots+x_n\alpha^{q-2}+\alpha^{q-1})(x_n-\alpha)$$

と因数分解されるから，式(1.8)は

$$|x_{n+1}^q-\alpha^q|\fallingdotseq\frac{1}{2}\left|\frac{f''(\alpha)\dfrac{1}{q^2}\dfrac{1}{\alpha^{2q-2}}-f'(\alpha)\left(\dfrac{q-1}{q^2}\dfrac{1}{\alpha^{2q-1}}\right)}{f'(\alpha)\dfrac{1}{q\alpha^{q-1}}}\right|(x_n^{q-1}+x_n^{q-2}\alpha+\cdots+x_n\alpha^{q-2}+\alpha^{q-1})^2(x_n-\alpha)^2 \quad (1.9)$$

となる．ここで $x_n\fallingdotseq\alpha$ とおくことにより式(1.6)を得る．

α が $f(x)=0$ の m 重根のとき，$f(x)$ に関するニュートン法は次の1次収束をする．

$$|x_{n+1}-\alpha|\leq\left(1-\frac{1}{m}\right)|x_n-\alpha| \quad (1.10)$$

これより2次収束のときと同様にして式(1.7)を得る．　□

式(1.6)からニュートン法と TH 法の収束の速さを比較する十分条件を与える．

定理3　$f(x)=0$ の根 α が単根のとき

$$0\leq\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}\frac{q-1}{\alpha}\leq 2 \quad (1.11)$$

を満たす整数 q が存在すれば，q 乗の TH 法がニュートン法より収束が速いか等しい．

証明　式(1.11)を変形すると

$$-1\leq 1+\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}\frac{1-q}{\alpha}\leq 1 \quad (1.12)$$

となる．ここで $|q\alpha^{q-1}|\geq 1$ のとき，$1/|q\alpha^{q-1}|\leq 1$ であるから

$$-\frac{1}{|q\alpha^{q-1}|}\leq 1+\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}\frac{1-q}{\alpha}\leq\frac{1}{|q\alpha^{q-1}|} \quad (1.13)$$

の範囲が得られる．これより

$$\left|\left(\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}+\frac{1-q}{2\alpha}\right)q\alpha^{q-1}\right|\leq\left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right| \quad (1.14)$$

を得る．これは TH 法が N 法より収束が速いか等しいことを示している．

$|q\alpha^{q-1}|\leq 1$ のとき，(1.12)より

$$-1\leq\left(1+\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}\frac{1-q}{\alpha}\right)|q\alpha^{q-1}|\leq 1 \tag{1.15}$$

となり，これより (1.14) を得る．　□

方程式 $f(x)=0$ を式変形したものを $g(x)=0$ とする．$g(x)$ に対する r 乗の TH 法は

$$x_{n+1}^{r}=x_{n}^{r}-rx_{n}^{r-1}\frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \tag{1.16}$$

であり，α が単根のとき

$$|x_{n+1}^{r}-\alpha^{r}|\fallingdotseq\frac{1}{2}\left|\left(\frac{g''(\alpha)}{g'(\alpha)}+\frac{1-r}{\alpha}\right)r\alpha^{r-1}\right|(x_n-\alpha)^2 \tag{1.17}$$

となり 2 次収束する．したがって式 (1.6) と式 (1.17) の $(x_n-\alpha)^2$ の係数を比較して次を得る．

定理 4

$$-\left|\frac{r\alpha^{r-1}}{q\alpha^{q-1}}\right|\leq\frac{\dfrac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}+\dfrac{1-q}{\alpha}}{\dfrac{g''(\alpha)}{g'(\alpha)}+\dfrac{1-r}{\alpha}}\leq\left|\frac{r\alpha^{r-1}}{q\alpha^{q-1}}\right| \tag{1.18}$$

なら，$f(x)$ の q 乗の TH 法 (1.4) が $g(x)$ の r 乗の TH 法 (1.16) より収束が速いか等しい．

2．土倉・堀口 (TH) 法による p 乗根を求めるいろいろな漸化式

土倉 [2] に p 乗根を表す 4 つの方程式 $f(x)=0$, $g(x)=0$, $h(x)=0$, $k(x)=0$ と，これらから p 乗根を求める和算家的発想による漸化式が導かれている．この§ではこれらの方程式に土倉・堀口 (TH) 法を適用し，p 乗根を求める漸化式を与える．

(1)　実数 A に対して，A の p 乗根 $A^{1/p}$ を求める最も簡単な方程式として

$$f(x)=x^{p}-A=0 \tag{2.1}$$

がある．$f(x)$ に TH 法を行うと，$A^{1/p}$ を求める漸化式

$$x_{n+1}=\left(x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{x_n^p-A}{px_n^{p-1}}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.2}$$

を得る．特に $q=1$ とするとニュートン法から得られる漸化式となる．しかし和算家は式変形だけから同じ漸化式を得ている（土倉 [2, p. 10]）．江戸時代の和算家たちの優秀性を垣間見ることが出来る．

⑵　Hildebrand[3] に次の方程式が与えられている．

$$g(x)=1-\frac{A}{x^p}=0 \tag{2.3}$$

根はもちろん $A^{1/p}$ である．この関数 $g(x)$ に TH 法を適用して漸化式

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=\left(x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{g(x_n)}{g'(x_n)}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &=\left(x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{x_n(x_n^p-A)}{pA}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &=\left[\frac{x_n^q}{pA}\Big(pA-q(x_n^p-A)\Big)\right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

を得る．これは分母に x_n がないので，手計算が楽になる．

定理４の収束比較条件式 (1.18) で $q=r=1$ とすると，ニュートン法の漸化式 (2.2) と漸化式 (2.4) のどちらの収束が速いか調べられる．§３でこれを行うが興味のある所である．土倉 [2, pp.13-14] では式 (1.18) のような微分など使わず，式 (2.2) と式 (2.4) の式変形だけから同じ結論を得ている．

⑶　s を 0 でない一つの定数とする．このとき方程式 (2.1) を拡張して

$$h(x)=x^{ps}-A^s=0 \tag{2.5}$$

を得る．根は $A^{1/p}$ である．$h(x)$ に TH 法を適用して漸化式

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=\left(x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{h(x_n)}{h'(x_n)}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &=\left(x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{x_n^{ps}-A^s)}{psx_n^{ps-1}}\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

を得る．

⑷　方程式 (2.3) についても (3) の場合と同様に拡張できる．s を 0 でない一つの定数とする．方程式

$$k(x)=1-\frac{A^s}{x^{ps}}=0 \tag{2.7}$$

の根は $A^{1/p}$ である．$k(x)$ に TH 法を適用して漸化式

$$x_{n+1}=\left(x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{k(x_n)}{k'(x_n)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(x_n^q-qx_n^{q-1}\frac{1-\dfrac{A^s}{x_n^{ps}}}{\dfrac{psA^s}{x_n^{ps+1}}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left[x_n^q\left(\frac{A^s ps-q(x_n^{ps}-A^s)}{A^s ps}\right)\right]^{\frac{1}{q}} \tag{2.8}$$

を得る．これも分母にx_nがないので，手計算が楽になる．しかし分母にx_nがないからといって，分母にx_nがある漸化式より収束が速いとは限らない．

3．p乗根を表すいろいろな方程式の土倉・堀口法による収束比較

この§では§2の土倉・堀口法で得られたいろいろな漸化式の収束比較を行う．数値計算はExcelを用い，標準10桁で出力する．

例1　$\sqrt{2}$を求める式(2.1)の$f(x)=x^2-2=0$と式(2.3)の$g(x)=1-\dfrac{2}{x^2}=0$にTH法を適用し，これらの収束を調べる．

(*a*)　$f(x)$のニュートン法とTH法の収束比較条件(1.11)は

$$0\leq\frac{f'(\sqrt{2})}{f''(\sqrt{2})}\frac{q-1}{\sqrt{2}}\leq 2 \tag{1.11'}$$

$$0\leq\frac{2\sqrt{2}}{2}\frac{q-1}{\sqrt{2}}\leq 2$$

$$0\leq q-1\leq 2$$

となる．これを満たすqは2,3である．このときTH法がN法より収束が速いか等しい．

実際に数値計算を行う．その結果は右表であり，理論と一致する．

例1 (*a*)　$f(x)$のTH法
初期値 x_0=1.5

q乗	反復回数 n
−5〜−1	4
1	3
2	1
3	3
4	3
5，6，7	4

(*b*)　$g(x)$のときのニュートン法とTH法の収束比較条件(1.11)は

$$0\leq\frac{g'(\sqrt{2})}{g''(\sqrt{2})}\frac{q'-1}{\sqrt{2}}\leq 2 \tag{1.11'}$$

である．これより

$$0\leq-\frac{1}{3}(q'-1)\leq 2$$

を得る．このとき TH 法が N 法より収束が速いか等しい．これを満たす q' は，$q'=-1,-2,-3,-4$ である．

数値計算は右表であり理論と一致する．

例1 (b)　$g(x)$のTH法 初期値 x_0=1.5

q 乗	反復回数 n	q 乗	反復回数 n
−10〜−5	4	1〜5	4
−4,−3	3	10	5
−2	1		
−1	3		

(c)　$f(x)=x^2-2=0$ と $g(x)=1-\dfrac{2}{x^2}=0$ の TH法のどちらが収束が速いか比較条件 (1.18) により調べる．

$$-\left|\frac{q'\alpha^{q'-1}}{q\alpha^{q-1}}\right| \leq \frac{\dfrac{f''(\sqrt{2})}{f'(\sqrt{2})}+\dfrac{1-q}{\sqrt{2}}}{\dfrac{g''(\sqrt{2})}{g'(\sqrt{2})}+\dfrac{1-q'}{\sqrt{2}}} \leq \left|\frac{q'\alpha^{q'-1}}{q\alpha^{q-1}}\right| \qquad (1.18')$$

のとき $f(x)$ の q 乗の TH 法が $g(x)$ の q'乗の TH 法より収束が速いか，等しい．

例えば $q=1$ に固定すると

$$-\left|q'\cdot 2^{\frac{q'-1}{2}}\right| \leq \frac{\dfrac{f''(\sqrt{2})}{f'(\sqrt{2})}}{\dfrac{g''(\sqrt{2})}{g'(\sqrt{2})}+\dfrac{1-q'}{\sqrt{2}}} \leq \left|q'\cdot 2^{\frac{q'-1}{2}}\right|$$

となる．これを計算してまとめると

$$-\left|q'\cdot 2^{\frac{q'-1}{2}}\right| \leq \frac{1}{-2-q'} \leq \left|q'\cdot 2^{\frac{q'-1}{2}}\right|$$

となる．この条件を満たす範囲を数値計算とグラフから求めると，$q' \leq -4$ or $1 \leq q'$ となる．

数値計算 (a),(b) の表は理論と一致する．

例 2　$f(x)=x^3-3375=0$ と　$g(x)=1-\dfrac{3375}{x^3}=0$　に TH法を用い，その収束を調べる．

(a)　$f(x)$ のニュートン法と TH 法の収束比較条件 (1.11) は

$$0 \leq \frac{f'(3375^{1/3})}{f''(3375^{1/3})}\frac{q-1}{3375^{1/3}} \leq 2 \qquad (1.11')$$

$$0 \leq \frac{q-1}{2} \leq 2$$

となる．これを満たす q は $q=2,3,4$ のときであり，このとき TH 法がN法より収束が速いか等しい．

数値計算は右表であり，理論と一致する．

例2 (a)　$f(x)$のTH法
初期値 x_0=14.5

q 乗	反復回数 n
−5〜−2	4
−1，1	3
2	3
3	1
4	3
5〜7	3
8，9	4

(*b*)　$g(x)$ のニュートン法と TH 法の収束比較条件 (1.11) は

$$0 \leq \frac{g'(3375^{1/3})}{g''(3375^{1/3})} \frac{q'-1}{3375^{1/3}} \leq 2 \tag{1.11'}$$

$$0 \leq -\frac{q'-1}{4} \leq 2$$

このとき TH 法が N 法より収束が速いか等しい．これを満たす q' は，$q'=-1,-2,-3,-4,-5,-6$ のときである．

数値計算は右表であり，理論と一致する．

例2 (*b*)　$g(x)$ の TH 法 初期値 x_0=14.5

q 乗	反復回数 n	q 乗	反復回数 n
−10〜−7	4	1	3
−6，−5，−4	3	2，3	4
−3	1	10	4
−2，−1	3	50	5

(*c*)　$f(x)=x^3-3375=0$ と $g(x)=1-\dfrac{3375}{x^3}=0$

TH 法の収束比較を収束比較条件 (1.18) により調べる．

$$-\left|\frac{q'15^{q'-1}}{q15^{q-1}}\right| \leq \frac{3375^{1/3}\dfrac{f''(3375^{1/3})}{f'(3375^{1/3})}+1-q}{3375^{1/3}\dfrac{g''(3375^{1/3})}{g'(3375^{1/3})}+1-q'} \leq \left|\frac{q'15^{q'-1}}{q15^{q-1}}\right| \tag{1.18'}$$

より

$$-\left|\frac{q'15^{q'-1}}{q15^{q-1}}\right| \leq \frac{\frac{1}{2}3375^{2/3}+1-q}{-\frac{1}{4}3375^{2/3}+1-q'} \leq \left|\frac{q'15^{q'-1}}{q15^{q-1}}\right|$$

$$-\left|\frac{q'15^{q'-1}}{q15^{q-1}}\right| \leq \frac{112.5+1-q}{-56.25+1-q'} \leq \left|\frac{q'15^{q'-1}}{q15^{q-1}}\right|$$

を得る．これを満たすとき $f(x)$ の q 乗が $g(x)$ の q' 乗の TH 法より収束が速いか等しい．

例えば $q=1$ とすると

$$-\left|q'15^{q'-1}\right| \leq \frac{112.5}{-56.25+1-q'} \leq \left|q'15^{q'-1}\right|$$

となる．この条件を満たす範囲を数値計算とグラフから求めると，$2 \leq q'$ を得る．

数値計算 (*a*),(*b*) の表は理論と一致する．

例３　２の立方根を求める漸化式

式(2.5)の $p=3$，$s=1/2$　　$h(x)=x^{3/2}-2^{1/2}=0$　　(2.5′)

式(2.7)の $p=3$，$s=1/2$　　$k(x)=1-\dfrac{2^{1/2}}{x^{3/2}}=0$　　(2.7′)

にTH法を用い，これらの収束を調べる．

(a)　$h(x)$のときのニュートン法とTH法の収束比較条件(1.11)は

$$0 \leq \frac{h'(2^{1/3})}{h''(2^{1/3})}\frac{q-1}{2^{1/3}} \leq 2 \qquad (1.11')$$

$$0 \leq q-1 \leq 1$$

となる．これを満たすqは2だけであり，このときTH法がN法より収束が速いか等しい．

数値計算は右表であり理論と一致する．

例3 (a)　$h(x)$のTH法
初期値 x_0=1.5

q乗	反復回数 n
−5，−4，−3	5
−2，−1	4
1，2	3
3	4
4，5	5

(b)　$k(x)$のときのニュートン法とTH法の収束比較条件(1.11)は

$$0 \leq \frac{k'(2^{1/3})}{k''(2^{1/3})}\frac{q-1}{2^{1/3}} \leq 2 \qquad (1.11')$$

$$0 \leq -\frac{1}{5}(q-1) \leq 1$$

となる．これを満たすqは，$q=-1,-2,-3,-4$であり，このときTH法がN法がより収束が速いか等しい．

数値計算は右表のようになり理論と一致している．

例3 (b)　$k(x)$のTH法
初期値 x_0=1.5

q乗	反復回数 n
−10〜−6	5
−5，−4，−3	4
−2，−1	3
1	4
2，3	5
4	6
5	10

(c)　$h(x)=x^{3/2}-2^{1/2}=0$と$k(x)=1-\dfrac{2^{1/2}}{x^{3/2}}=0$ の TH法では，
どちらが収束が速いか収束比較条件(1.18)により調べる．

$$-\left|\frac{q'2^{(q'-1)/3}}{q2^{(q-1)/3}}\right| \leq \frac{2^{1/3}\dfrac{h''(2^{1/3})}{h''(2^{1/3})}+1-q}{2^{1/3}\dfrac{k''(2^{1/3})}{k'(2^{1/3})}+1-q'} \leq \left|\frac{q'2^{(q'-1)/3}}{q2^{(q-1)/3}}\right| \qquad (1.18')$$

例えば$q=1$とすると

$$-\left|q'2^{(q'-1)/3}\right| \leq -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{2}-q'} \leq \left|q'2^{(q'-1)/3}\right|$$

この条件を満たす範囲を数値計算とグラフから求めると，$q' \geq 1$となり，このとき$h(x)$のN法が$k(x)$のq'乗のTH法より収束が速いか等しい．

数値計算(a),(b)の表は理論と確かに一致する．

参考文献

[1] 堀口俊二：和算家的発想の累乗根を求める方程式の村瀬義益・ニュートン型による漸化式（土倉・堀口法）の収束比較（単独），日本数学会 2012 年度年会 3 月，数学基礎論および歴史分科会講演アブストラクト pp.5-6., 口頭発表
[2] 土倉 保：和算家的発想による p 乗根の求め方，和算研究所紀要 No. 11 号，2011，pp.10-16.
[3] F.B.Hildebrand, Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1956
[4]『明治前日本数学史』，第４巻，岩波書店，1959
[5] 堀口俊二：村瀬義益とニュートンの漸化式より得られる一般漸化式，数理解析研究所講究録 1739，京都大学数理解析研究所，2011 年４月
[6] 鈴木武雄：『和算の成立』，恒星社厚生閣，2007 年７月
[7] 村瀬義益著･西田知己校注：『算法勿憚改』，研成社，1993
[8] 永坂秀子：『計算機と数値解析』，朝倉書店，1980.3
[9] 山本哲朗：『数値解析入門［増訂版］』，サイエンス社，1976.10
[10] 戸川隼人：『数値計算法』，コロナ社，1981.1
[11] 森正武・室田一雄・杉原正顕：『数値計算の基礎』，岩波書店，1993.5

Comparisons of convergence of the Tsuchikura-Horiguchi method (the first extension recurrence formula of Murase Yoshimasu-Newton's type) of various equation which represent radical roots

Shunji HORIGUCHI

2013年2月
新潟産業大学経済学部紀要　第41号別刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.41 February 2013