ニュートン法から得られる平方根,立方根,4乗根の連分数表示

堀　口　俊　二

鈴　木　武　雄

2012年７月

新潟産業大学経済学部紀要　第40号別刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.40　July　2012

ニュートン法から得られる平方根,立方根,4乗根の連分数表示

Continued Fraction Presentations of the Square Root, Cubic Root and 4th Root by the Newton's Method

堀　口　俊　二（新潟産業大学）
鈴　木　武　雄（オイラー研究所）

Shunji HORIGUCHI
Takeo SUZUKI

要旨

実数 a のp乗根を表す方程式 $f(x)=x^p-a=0$ を式変形し，これにニュートン法を適用する．これよりp乗根の連分数表示が得られる（§2 定理4，定理6）．さらにこれらの連分数表示から平方根，立方根，4乗根の連分数表示を求める（§2 定理5，定理7）．§1 のニュートン法と連分数の定義から出発する．

1．ニュートン法と連分数

定義 1　方程式 $f(x)=0$ の根（解）を求める漸化式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.1}$$

をニュートン法（1669）あるいはニュートン·ラフソン法（1690）という．これは現在もっともよく用いられている．

例　1　a を正の実数とする．方程式 $f(x)=x^2-a=0$ の解（根）は $\pm\sqrt{a}$ である．この解を求める漸化式はニュートン法を使うと

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=x_n-\frac{x_n^2-a}{2x_n} \\ &=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

となる．これはギリシャ時代から知られた漸化式であり，電卓で平方根を求めるプログラムとして利用されている．

定義２　連分数とは，分数の分母にさらに分数が含まれているような分数をいう．すなわち

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cdots}}} \tag{1.3}$$

のような形の分数である．特に，$b_1=b_2=b_3=\cdots=1$ のような分子がすべて 1 である場合を正則連分数という．

例　２　方程式 $x^2=a$ の解（平方根）を求めるために，次のように式変形する．

$$x^2+x=x+a \tag{1.4}$$

$$x(x+1)=x+a$$

$$x=\frac{x+a}{x+1}$$

$$x=1+\frac{a-1}{x+1} \tag{1.5}$$

これより平方根を求める漸化式

$$x_{n+1}=1+\frac{a-1}{x_n+1} \tag{1.6}$$

を得る．ここで $a=2$，$x_0=1$ とおくと

$$x_1=1+\frac{1}{2}$$

$$x_2=1+\frac{1}{x_1+1}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}$$

$$x_3=1+\frac{1}{x_2+1}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$$

$$x_4=\cdots$$

$$x_5=\cdots$$

となり，正則無限連分数展開となる．

2．ニュートン法から得られる累乗根の連分数表示

2．1　平方根の連分数表示　方程式 $f(x)=x^2-a=0$ を次のように式変形する．

$$x^2=a \tag{2.1.1}$$

$$x^2+x=x+a$$

$$x(x+1)=x+a$$

$$x=\frac{x+a}{x+1} \tag{2.1.2}$$

ここで

$$g(x)=x-\frac{x+a}{x+1}$$

$$=\frac{x^2-a}{x+1} \tag{2.1.3}$$

とおき，$g(x)$ にニュートン法を適用して，式変形する．

$$x_{n+1}=x_n-\frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \tag{2.1.4}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\dfrac{x_n+a}{x_n+1}}{\dfrac{x_n^2+2x_n+a}{(x_n+1)^2}} \tag{2.1.5}$$

$$=\frac{(x_n+1)^2+(a-1)+2x_n(a-1)}{(x_n+1)^2+(a-1)}$$

$$=1+\frac{2x_n(a-1)}{(x_n+1)^2+(a-1)}$$

$$=1+\frac{1}{\dfrac{x_n^2+2x_n+a}{2x_n(a-1)}}$$

$$=1+\frac{a-1}{1+\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)} \tag{2.1.6}$$

となる．したがって次の定理を得る．

定理３　連分数表示の漸化式

$$x_{n+1}=1+\cfrac{a-1}{1+\cfrac{1}{2}\left(x_n+\cfrac{a}{x_n}\right)} \tag{2.1.7}$$

は，平方根 $\pm\sqrt{a}$ を求める式である.

（2.1.7）の分母に（1.2）の右辺の漸化式があることに注意せよ.

例　３　2 の平方根 $\sqrt{2}$ を求める漸化式は

$$x_{n+1}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}\left(x_n+\cfrac{2}{x_n}\right)} \tag{2.1.8}$$

となる. $x_0=1$ ここで とおくと

$$x_1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}\left(1+\cfrac{2}{1}\right)}=1.4 \tag{2.1.9}$$

$$x_2=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}\left(1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{2}}+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{2}}}\right)}=1.4140\cdots \tag{2.1.10}$$

となり，$\sqrt{2}=1.4142135\cdots$ に近づいてゆく.

２.２　$p(\geqq 2)$ 乗根の連分数表示　方程式 $f(x)=x^p-a=0$ を次のように式変形する.

$$x^p=a \tag{2.2.1}$$

$$x^p+x^{p-1}=x^{p-1}+a$$

$$x(x^{p-1}+x^{p-2})=x^{p-1}+a$$

$$x=\frac{x^{p-1}+a}{x^{p-1}+x^{p-2}} \tag{2.2.2}$$

ここで

$$g(x)=x-\frac{x^{p-1}+a}{x^{p-1}+x^{p-2}}$$

$$=\frac{x^p-a}{x^{p-1}+x^{p-2}} \tag{2.2.3}$$

とおき，$g(x)$ にニュートン法

$$x_{n+1}=x_n-\frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \tag{2.2.4}$$

を適用する．

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{px^{p-1}(x^{p-1}+x^{p-2})-(x^p-a)((p-1)x^{p-2}+(p-2)x^{p-3})}{(x^{p-1}+x^{p-2})^2} \\ &= \frac{x^{2p-2}+2x^{2p-3}+a(p-1)x^{p-2}+a(p-2)x^{p-3}}{(x^{p-1}+x^{p-2})^2} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

であるから

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n-\frac{\dfrac{x_n^p-a}{x_n^{p-1}+x_n^{p-2}}}{\dfrac{x_n^{2p-2}+2x_n^{2p-3}+a(p-1)x_n^{p-2}+a(p-2)x_n^{p-3}}{(x_n^{p-1}+x_n^{p-2})^2}} \\ &= \frac{x_n^{2p-2}+apx_n^{p-1}+a(p-1)x_n^{p-2}}{x_n^{2p-2}+2x_n^{2p-3}+a(p-1)x_n^{p-2}+a(p-2)x_n^{p-3}} \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

となる．さらに割算を行って式変形する．

$$x_{n+1}=1+\frac{apx_n^{p-1}-2x_n^{2p-3}-a(p-2)x_n^{p-3}}{x_n^{2p-2}+2x_n^{2p-3}+a(p-1)x_n^{p-2}+a(p-2)x_n^{p-3}} \tag{2.2.7}$$

$$=1+\frac{1}{\dfrac{x_n^{2p-2}+2x_n^{2p-3}+a(p-1)x_n^{p-2}+a(p-2)x_n^{p-3}}{-2x_n^{2p-3}+apx_n^{p-1}-a(p-2)x_n^{p-3}}}$$

$$=1+\frac{1}{-\dfrac{1}{2}x_n-1+\dfrac{\dfrac{1}{2}apx_n^p+apx_n^{p-1}+\dfrac{1}{2}apx_n^{p-2}}{-2x_n^{2p-3}+apx_n^{p-1}-a(p-2)x_n^{p-3}}}$$

$$=1-\frac{2}{x_n+2+\dfrac{apx_n^p+2apx_n^{p-1}+apx_n^{p-2}}{2x_n^{2p-3}-apx_n^{p-1}+a(p-2)x_n^{p-3}}}$$

$$=1-\frac{2}{x_n+2+\dfrac{1}{\dfrac{2x_n^{2p-3}-apx_n^{p-1}+a(p-2)x_n^{p-3}}{apx_n^p+2apx_n^{p-1}+apx_n^{p-2}}}}$$

$$x_{n+1}=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{1}{\cfrac{2x_n^p-apx_n^2+a(p-2)}{apx_n^3+2apx_n^2+apx_n}}}$$

$$=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{ap}{\cfrac{2x_n^p-apx_n^2+a(p-2)}{x_n^3+2x_n^2+x_n}}} \tag{2.2.8}$$

となる．したがって次の定理を得る．

定理４　$g(x)=x-\dfrac{x^{p-1}+a}{x^{p-1}+x^{p-2}}$ にニュートン法を行うことにより，a の $p(\geqq 2)$ 乗根の連分数表示の漸化式

$$x_{n+1}=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{ap}{\cfrac{2x_n^p-apx_n^2+a(p-2)}{x_n^3+2x_n^2+x_n}}} \tag{2.2.9}$$

を得る．

定理 4 の漸化式を $p=3$ のとき計算する．

$$x_{n+1}=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{3a}{\cfrac{2x_n^3-3ax_n^2+a}{x_n^3+2x_n^2+x_n}}} \tag{2.2.10}$$

$$=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{3a}{2+\cfrac{(-3a-4)x_n^2-2x_n+a}{x_n^3+2x_n^2+x_n}}}$$

$$=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{3a}{2+\cfrac{-(3a+4)x_n^2-2x_n+a}{x_n^3+2x_n^2+x_n}}}$$

$$=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{3a}{2+\cfrac{1}{\cfrac{x_n^3+2x_n^2+x_n}{-(3a+4)x_n^2-2x_n+a}}}}$$

$$=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{3a}{2+\cfrac{1}{-\frac{1}{3a+4}x_n-\frac{6(a+1)}{(3a+4)^2}-\frac{1}{(3a+4)^2}\frac{4(a+1)(3a+1)x_n+6a(a+1)}{(3a+4)x_n^2+2x_n-a}}}}$$

$$=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{3a}{2+\cfrac{1}{-\frac{1}{3a+4}x_n-\frac{6(a+1)}{(3a+4)^2}-\frac{1}{(3a+4)^2}\cfrac{1}{\frac{(3a+4)x_n^2+2x_n-a}{4(a+1)(3a+1)x_n+6a(a+1)}}}}} \tag{2.2.11}$$

$$\frac{(3a+4)x_n^2+2x_n-a}{4(a+1)(3a+1)x_n+6a(a+1)}=\frac{3a+4}{4(3a^2+4a+1)}x_n+\frac{1}{4(3a^2+4a+1)}\frac{-9a^2+4}{2(3a+1)}+\frac{-9a^3-24a^2-16a}{4(3a+1)^2}\frac{1}{4(3a^2+4a+1)x_n+6(a+1)}$$

となる.

定理 4 の漸化式を $p=4$ のとき計算する.

$$x_{n+1}=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{4a}{\frac{2x_n^4-4ax_n^2+2a}{x_n^3+2x_n^2+x_n}}} \tag{2.2.12}$$

$$=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{4a}{2x_n-4+\frac{(-4a+6)x_n^2+4x_n+2a}{x_n^3+2x_n^2+x_n}}}$$

$$=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{4a}{2x_n-4+\cfrac{1}{\frac{x_n^3+2x_n^2+x_n}{(-4a+6)x_n^2+4x_n+2a}}}}$$

$$=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{4a}{2x_n-4+\cfrac{1}{\frac{1}{-4a+6}x_n+\frac{1}{-4a+6}\frac{-4a+4}{-2a+3}+\frac{\frac{6a^2-7a+1}{(-2a+3)^2}x_n-\frac{4a(-a+1)}{(-2a+3)^2}}{(-4a+6)x_n^2+4x_n+2a}}}}$$

$$=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{4a}{2x_n-4+\cfrac{1}{\frac{1}{-4a+6}x_n+\frac{-2a+2}{(-2a+3)^2}+\cfrac{\frac{1}{(-2a+3)^2}((6a^2-7a+1)x_n-4a(-a+1))}{(-4a+6)x_n^2+4x_n+2a}}}}$$

$$=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{4a}{2x_n-4+\cfrac{1}{\frac{1}{2(-2a+3)}x_n+\frac{-2a+2}{(-2a+3)^2}+\frac{1}{(-2a+3)^2}\frac{(6a^2-7a+1)x_n-4a(-a+1)}{(-4a+6)x_n^2+4x_n+2a}}}}$$

$$=1-\cfrac{2}{x_n+2+\cfrac{4a}{2x_n-4+\cfrac{1}{\frac{1}{2(-2a+3)}x_n+\frac{-2a+2}{(-2a+3)^2}+\frac{1}{(-2a+3)^2}\cfrac{1}{\frac{2(-2a+3)x_n^2+4x_n+2a}{(6a^2-7a+1)x_n+4a(a-1)}}}}} \tag{2.2.13}$$

$$\frac{2(-2a+3)x_n^2+4x_n+2a}{(6a^2-7a+1)x_n+4a(a-1)}=\frac{2(-2a+3)}{6a^2-7a+1}x_n+\frac{16a^3-16a^2-4a+4}{(6a^2-7a+1)^2}+$$
$$\frac{2a(6a^2-7a+1)^2-16a(a-1)(4a^3-4a^2-a+1)}{(6a^2-7a+1)^2((6a^2-7a+1)x_n+4a(a-1))}$$

$$=\frac{2(-2a+3)}{6a^2-7a+1}x_n+\frac{16a^3-16a^2-4a+4}{(6a^2-7a+1)^2}+$$
$$\frac{1}{(6a^2-7a+1)^2}\cfrac{1}{\frac{(6a^2-7a+1)x_n+4a(a-1)}{2a(6a^2-7a+1)^2-16a(a-1)(4a^3-4a^2-a+1)}}$$

となる．したがって次の定理を得る．

定理５　漸化式（2.2.9）より得られる a の立方根，4乗根を近似する連分数の漸化式は(2.2.11)，(2.2.13）であり，以下の型である．

$$x_{n+1}=1+\cfrac{c_1}{a_1x_n+b_1+\cfrac{c_2}{a_2x_n+b_2+\cfrac{c_3}{a_3x_n+b_3+\cfrac{c_4}{a_4x_n+b_4+\cfrac{c_5}{a_5x_n+b_5}}}}} \tag{2.2.14}$$

２．３　p を2以上の整数定数とし，$f(x)=x^p-a=0$ を次のように式変形する．

$$x^p=a \tag{2.3.1}$$

$$x^p+x=x+a$$

$$x(x^{p-1}+1)=x+a$$

$$x=\frac{x+a}{x^{p-1}+1} \tag{2.3.2}$$

注意　$p=2$のとき（2.3.2）=（2.1.2）となる．

ここで

$$h(x)=x-\frac{x+a}{x^{p-1}+1}=\frac{x^p-a}{x^{p-1}+1} \tag{2.3.3}$$

とおき，$h(x)$にニュートン法を適用する．

$$x_{n+1}=x_n-\frac{h(x_n)}{h'(x_n)} \tag{2.3.4}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\dfrac{x_n^p-a}{x_n^{p-1}+1}}{\dfrac{x_n^{2(p-1)}+px_n^{p-1}+a(p-1)x_n^{p-2}}{(x_n^{p-1}+1)^2}} \tag{2.3.5}$$

となる．これを計算して纏めると

$$x_{n+1}=\frac{(p-1)x_n^p+apx_n^{p-1}+a}{x_n^{2(p-1)}+px_n^{p-1}+a(p-1)x_n^{p-2}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{x_n^{2(p-1)}+px_n^{p-1}+a(p-1)x_n^{p-2}}{(p-1)x_n^p+apx_n^{p-1}+a}} \tag{2.3.6}$$

となる．この分母の有理式の割算を行うと次の定理を得る．

定理６　$h(x)=x-\dfrac{x+a}{x^{p-1}+1}$ にニュートン法を適用することにより，a の p 乗根の連分数表示の漸化式

$$x_{n+1}=\cfrac{1}{\dfrac{1}{p-1}x_n^{p-2}-\dfrac{ap}{(p-1)^2}x_n^{p-3}+\cfrac{1}{\cfrac{(p-1)x_n^p+apx_n^{p-1}+a}{\dfrac{a^2p^2}{(p-1)^2}x_n^{2p-4}+px_n^{p-1}+\dfrac{ap(p-2)}{p-1}x_n^{p-2}+\dfrac{a^2p}{(p-1)^2}x_n^{p-3}}}} \tag{2.3.7}$$

が得られる．

定理 6 の漸化式を $p=3,4$ のとき計算することにより，次の定理を得る．

定理７　漸化式（2.3.7）より，a の立方根，4乗根を近似する連分数の漸化式が以下のように得られる．

立方根

$$x_{n+1}=\cfrac{1}{\dfrac{1}{2}x_n-\dfrac{3a}{4}+\cfrac{1}{\dfrac{8}{3}\dfrac{1}{4-3a^2}x_n-\dfrac{4}{3}\dfrac{9a^3-8a}{(4-3a^2)^2}+\cfrac{1}{\dfrac{1}{32}\dfrac{1}{a^2(a^2-1)}(4-3a^2)^3x_n+\dfrac{(27a^4-12a^2-16)(3a^2-4)^2}{24\cdot 32a(a^2-1)^2}+\dfrac{\gamma}{\alpha x_n+\beta}}}} \tag{2.3.8}$$

$$\alpha=\frac{24a^2(a^2-1)}{(3a^2-4)^2},\ \beta=\frac{a^3(9a^2-8)}{(3a^2-4)^2}$$

$$\gamma=\frac{2\cdot 32a^2(a^2-1)^2-a^2(9a^2-8)(27a^4-12a^2-16)}{8\cdot 32(a^2-1)^2}$$

4乗根

$$x_{n+1}=\cfrac{1}{\frac{1}{3}x_n^2-\frac{4a}{9}x_n+\frac{16a^2}{27}+\cfrac{1}{\cfrac{3x_n^4+4ax_n^3+a}{\frac{108-64a^3}{27}x_n^3+\frac{8a}{3}x_n^2+\frac{4a^2}{9}x_n-\frac{16a^3}{27}}}} \tag{2.3.9}$$

$$\frac{3x_n^4+4ax_n^3+a}{\frac{108-64a^3}{27}x_n^3+\frac{8a}{3}x_n^2+\frac{4a^2}{9}x_n-\frac{16a^3}{27}}=\frac{3\cdot 27}{108-64a^3}x_n-\frac{27\cdot 212a}{(108-64a^3)^2}$$

$$+\cfrac{1}{\cfrac{\frac{108-64a^3}{27}x_n^3+\frac{8a}{3}x_n^2+\frac{4a^2}{9}x_n-\frac{16a^3}{27}}{\frac{15228a^2}{(108-64a^3)^2}x_n^2+\frac{2592a^3}{(108-64a^3)^2}x_n+\frac{11664a-17216a^4+4096a^7}{(108-64a^3)^2}}}$$

$$\cfrac{\frac{108-64a^3}{27}x_n^3+\frac{8a}{3}x_n^2+\frac{4a^2}{9}x_n-\frac{16a^3}{27}}{\frac{15228a^2}{(108-64a^3)^2}x_n^2+\frac{2592a^3}{(108-64a^3)^2}x_n+\frac{11664a-17216a^4+4096a^7}{(108-64a^3)^2}}$$

$$=\alpha_2x_n+\beta_2+\cfrac{1}{\alpha_3x_n+\beta_3+\cfrac{\gamma_4}{\alpha_4x_n+\beta_4}}$$

参考文献

［1］ 堀口俊二，鈴木武雄：ニュートン法から得られる平方根，立方根，4乗根の連分数表示，日本数学会秋季統合分科会,代数学分科会講演アブストラクトpp.125-126., 2011.10

［2］ 鈴木武雄：『和算の成立』，恒星社厚生閣，2007.7

［3］ 永坂秀子：『計算機と数値解析』，朝倉書店，1980.3

［4］ 藤野清次：『数値計算の基礎』，サイエンス社，1998.2

Continued Fraction Presentations of the Square Root, Cubic Root and 4th Root by the Newton's Method

Shunji HORIGUCHI

Takeo SUZUKI

2012年７月
新潟産業大学経済学部紀要　第40号別刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.40　July　2012