村瀬義益（よします）の３次方程式の逐次近似法の拡張定理とニュートン法の拡張定理の関連について

On Relations Between Enhancing Theorems of the Methods of the Murase's Successive Approximations of a Cubic Equation and the Enhancing Theorems of the Newton's Method

堀　口　俊　二

Shunji HORIGUCHI

要旨

村瀬義益（新潟佐渡・東京・千葉）は『算法勿憚改（ふつだんかい）』（1673，1674新刊，1681開板『算学淵底記（えんていき）』）を著した．村瀬はこの書において，ある種の 3 次方程式を 3 通りの逐次近似法で解くという，世界数学史上でも稀有な計算を成し遂げた．§1 は『算法勿憚改』にある 3 次方程式の逐次近似法の説明である．§2 はこれらの拡張定理Ⅰである．さらに§3，4，5 は拡張定理Ⅱ，Ⅲ，Ⅳである．§5 はこの論文の主テーマである．それは村瀬の拡張漸化式とニュートンの拡張漸化式の関連を与える．定理 31 は主定理である．§6 はパソコンを使い，村瀬の拡張漸化式，ニュートンの漸化式および村瀬・ニュートンの拡張漸化式の数値計算を行う．§7 においてこれらを考察・比較する．§8 は村瀬の逐次近似法の考え方とその歴史的考察である．§9 はまとめである．§10 は本稿の内容から，コンピュータ実習および数学教育の教材を与える．§11 は研究課題である．

Abstract

Yoshimasu Murase(Sado Niigata・Tokyo・Chiba) wrote the Sanpo Hutudankai(算法勿憚改)(1673, 1674) or Sangaku－Yenteiki(算学淵底記)(1681). Murase performed rare calculations in the world mathematics history to solve a certain cubic equation by methods of successive approximation in this book. §1 is an explanation of methods of successive approximations of a cubic equation in "算法勿憚改". §2 gives enhancing theorems Ⅰ of them. Furthermore,§3, 4, 5 gives enhancing theorems Ⅱ, Ⅲ, Ⅳrespectively. §5 is a main theme of this paper. It give relations between the Murase's enhanced recurrence formulas and Newton's enhanced recurrence formulas(methods), and Theorem 31 is the main theorem. §6 calculate the Murase's enhanced recurrence formulas, Newton's recurrence formula and Murase・Newton's enhanced

recurrence formula by a personal computer. §7 give the comparisons and considerations of them. §8 state the idea of the approximation methods of Murase and the historical considerations of them. §9 is settling. §10 give the teaching materials of the computer practices and the mathematics educations from the contents of this paper. §11 is research challenges.

１．村瀬義益の３次方程式の逐次近似法

『算法勿憚改』第２巻末に「炉縁（＝囲炉裏）の太さを知る」という現実問題がある．すなわち

「寸坪百九十二坪有．是を壱尺四寸四方の炉縁にしてふとさ何程の方と問．答曰，二寸四方．」（[1, pp. 68-70]）これは図 1 のような炉縁の体積を 192 立法寸とするとき，一辺が１尺４寸（＝14 寸）のとき，幅と高さを求めよ，という問題である．

この問題の方程式を作る．太さを x とおくと，縦 x，横（幅）$14-x$，高さ x の直方体を４個組み合わせると炉縁になり，この体積が 192 であるから次の３次方程式になる．

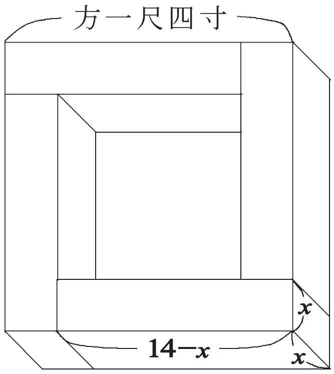

図１　囲炉裏

$$4x^2(14-x)=192 \tag{1.1}$$

$$x^3-14x^2+48=0 \tag{1.2}$$

この解は $x=2,\ 6\pm2\sqrt{15}$ である．

村瀬はこの方程式を解くのに（1.1）から以下のような漸化式を考えた．

第 1 法
$$x_{n+1}^2=\frac{48+x_n^3}{14}\ (n=0,1,2,\cdots) \tag{1.3}$$

村瀬は，$x_0=0$ を初期値として，$x_1=1.85$，$x_2=1.97$，$x_3=1.9936$ と逐次計算して，解 $x=2$ を決定している．

第 2 法
$$x_{n+1}^2=\frac{48}{14-x_n}\ (n=0,1,2,\cdots) \tag{1.4}$$

村瀬は，$x_0=0$ を初期値として，$x_1=1.85$，$x_2=1.9876$，$x_3=1.9999$，$x_4=1.999907$ と逐次計算して，解 $x=2$ を決定している．

第 3 法の文章は長年未解読であったが[1]，2009年 6 月に藤井康生が解読に成功する．それは次式である．

第 3 法　$$x_{n+1}^2=\frac{48-x_n^3}{14-2x_n}\,(n=0,1,2,\cdots) \tag{1.5}$$

村瀬は，関孝和（1640頃-1708）の『題術弁議』（1685）にある逐次近似法より前にこれを考案した．

2．村瀬義益の逐次近似法の拡張定理 I

（1. 1）より

$$\text{断面積 } x^2\times\text{長さ}(14-x)=\text{直方体の体積 } 48 \tag{2.1}$$

を得る．第 1 法から第 3 法の式の変化は，直方体の体積は，1 辺の長さを x だけ短くすると体積は x^3 だけ少なくなり，断面積は変わらないことを意味している．すなわち次式となる．

$$x^2(14-x)-x^3=48-x^3 \tag{2.2}$$

村瀬の（1. 3)～(1. 5）を一般化する．

定理 1　漸化式

$$x_{n+1}^2=\frac{48-(m-1)x_n^3}{14-mx_n}\,(m\in\boldsymbol{R}(\text{実数}),\,n=0,1,2,\cdots) \tag{2.3}$$

は（1. 3)～(1. 5）の拡張漸化式である．ここで m は実数である．

定理 2　(1. 3)～(1. 5）を p 次方程式（$p\geqq2$）

$$x^p+a_1x^{p-1}+a_2x^{p-2}+\cdots+a_{p-1}x+a_p=0 \tag{2.4}$$

に拡張すると次の漸化式となる．

$$x_{n+1}^{p-1}=\frac{(m-1)x_n^p-a_2x_n^{p-2}-a_3x_n^{p-3}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{mx_n+a_1} \tag{2.5}$$

系　3　(2. 5）において $m=1$ のとき計算効率が最も良い．

1　藤原松三郎『明治前日本数学史』第一巻（1979, pp. 368-370）は，村瀬の逐次近似法は「特に注意を要する」と述べている．しかし「第 3 法は正式に三次方程式を解く方法である」とだけ記している．藤原は村瀬の漸化式の重要性にうすうす気付いていた（鈴木武雄）．下平和夫『和算の歴史』(1965, p. 172）は，ホーナー法 とだけ記している．

村瀬の拡張漸化式の作り方（2.5）において $m=1$ とすれば，これは（2.4）を式変形して直接得られる．この式に対して，分母の x を m 倍したとき，分子に新たに $(m-1)x^p$ の項を追加すればよい．このようにして村瀬は式を変化させたのである．

系　4　（2.5）の $p-1$ 乗根は次式となる．

$$x_{n+1}=\left(\frac{(m-1)x_n^p-a_2x_n^{p-2}-a_3x_n^{p-3}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{mx_n+a_1}\right)^{1/(p-1)} \tag{2.6}$$

ここで $m=1$ とすると次式となる．

$$x_{n+1}=\left(\frac{-a_2x_n^{p-2}-a_3x_n^{p-3}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{x_n+a_1}\right)^{1/(p-1)} \tag{2.7}$$

例　1　２次方程式

$$x^2+a_1x+a_2=0 \tag{2.8}$$

のとき，（2.5）に当てはめると次式を得る．

$$x_{n+1}=\frac{(m-1)x_n^2-a_2}{mx_n+a_1} \tag{2.9}$$

例　2　３次方程式

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \tag{2.10}$$

のとき，（2.5）に当てはめると次式を得る．

$$x_{n+1}^2=\frac{(m-1)x_n^3-a_2x_n-a_3}{mx_n+a_1} \tag{2.11}$$

（2.6）に当てはめると次式を得る．

$$x_{n+1}=\left(\frac{(m-1)x_n^3-a_2x_n-a_3}{mx_n+a_1}\right)^{1/2} \tag{2.12}$$

３．村瀬義益の逐次近似法の拡張定理Ⅱ

（2.5）の両辺を x^{q-1} で割ると次の定理の式を得る．

定理 5

$$x_{n+1}^{p-q}=\frac{(m-1)x_n^p-a_2x_n^{p-2}-a_3x_n^{p-3}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{x^{q-1}(mx_n+a_1)} \tag{3.1}$$

さらに $q=p-1$ のとき次式となる．

$$x_{n+1}=\frac{(m-1)x_n^p-a_2x_n^{p-2}-a_3x_n^{p-3}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{x_n^{p-2}(mx_n+a_1)} \tag{3.2}$$

ここで $m=1$ とすると次式をなる．

$$x_{n+1}=\frac{-a_2x_n^{p-2}-a_3x_n^{p-3}-\cdots-a_{p-2}x_n^2-a_p}{x_n^{p-2}(x_n+a_1)} \tag{3.3}$$

（2.6）と（3.2）では前者の方が収束は速いであろう．これは数値計算による考察を行う必要がある．

例　3　3次方程式

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \tag{2.10}$$

のとき，（3.2）に当てはめると次式を得る．

$$x_{n+1}=\frac{(m-1)x_n^3-a_2x_n-a_3}{x_n(mx_n+a_1)} \tag{3.4}$$

$m=1$ のとき次式を得る．

$$x_{n+1}=\frac{-a_2x_n-a_3}{x_n(x_n+a_1)} \tag{3.5}$$

p 次方程式（2.4）は

$$x^{p-q}(mx^q+a_q)-(m-1)x^p+a_1x_n^{p-1}+\cdots+a_{q-1}x_n^{p-(q-1)}+a_{q+1}x_n^{p-(q+1)}+\cdots+a_{p-1}x_n-a_p=0 \tag{3.6}$$

と変形できるから

定理 6　（3.6）より次の漸化式を得る．

$$x_{n+1}^{p-q}=\frac{(m-1)x_n^p-a_1x_n^{p-1}-\cdots-a_{q-1}x_n^{p-(q-1)}-a_{q+1}x_n^{p-(q+1)}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{mx_n^q+a_q} \tag{3.7}$$

系　7　$q=p-1$ のとき（3.7）は次式となる．

$$x_{n+1}=\frac{(m-1)x_n^p-a_1x_n^{p-1}-a_2x_n^{p-2}-\cdots-a_{p-3}x_n^3-a_{p-2}x_n^2-a_p}{mx_n^{p-1}+a_{p-1}} \tag{3.8}$$

ここで $m=1$ とすると次式となる.

$$x_{n+1}=\frac{-a_1x_n^{p-1}-a_2x_n^{p-2}-\cdots-a_{p-3}x_n^3-a_{p-2}x_n^2-a_p}{x_n^{p-1}+a_{p-1}} \tag{3.9}$$

これは p 次方程式（2.4）を変形して得られる漸化式である.

系　8　(3.7) の $p-q$ 乗根は次式となる.

$$x_{n+1}=\left(\frac{(m-1)x_n^p-a_1x_n^{p-1}-\cdots-a_{q-1}x_n^{p-(q-1)}-a_{q+1}x_n^{p-(q+1)}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{mx_n^q+a_q}\right)^{1/(p-q)} \tag{3.10}$$

ここで $m=1$ とすると次式となる.

$$x_{n+1}=\left(\frac{-a_1x_n^{p-1}-\cdots-a_{q-1}x_n^{p-(q-1)}-a_{q+1}x_n^{p-(q+1)}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{x_n^q+a_q}\right)^{1/(p-q)} \tag{3.11}$$

系　9　(3.7) の両辺を x^{p-q-1} で割ると次式となる.

$$x_{n+1}=\frac{(m-1)x_n^p-a_1x_n^{p-1}-\cdots-a_{q-1}x_n^{p-(q-1)}-a_{q+1}x_n^{p-(q+1)}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{x_n^{p-q-1}(mx_n^q+a_q)} \tag{3.12}$$

ここで $m=1$ とすると次式となる.

$$x_{n+1}=\frac{-a_1x_n^{p-1}-\cdots-a_{q-1}x_n^{p-(q-1)}-a_{q+1}x_n^{p-(q+1)}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{x_n^{p-q-1}(x_n^q+a_q)} \tag{3.13}$$

例　4　2 次方程式 $x^2+a_1x+a_2=0$ のとき，(3.8) に当てはめると次式になる.

$$x_{n+1}=\frac{(m-1)x_n^2-a_2}{mx_n+a_1} \tag{2.9}$$

例　5　3 次方程式 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ のとき，(3.8) に当てはめると次式になる.

$$x_{n+1}=\frac{(m-1)x_n^3-a_1x_n^2-a_3}{mx_n^2+a_2} \tag{3.14}$$

(3.10) に当てはめると次式になる.

$q=1$ のとき

$$x_{n+1}=\left(\frac{(m-1)x_n^3-a_2x_n-a_3}{mx_n+a_1}\right)^{1/2} \tag{3.15}$$

$q=2$ のとき

$$x_{n+1}=\frac{(m-1)x_n^3-a_1x_n^2-a_3}{mx_n^2+a_2} \qquad (3.16)\,(=(3.14))$$

４．村瀬義益の逐次近似法の拡張定理Ⅲ

さらに村瀬の漸化式の拡張漸化式を与える．

p 次方程式（2.4）の初項から $k+1$ 項までを x^{p-k} で括ると

$$x^{p-k}(x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+\cdots+a_{k-1}x+a_k)=-(a_{k+1}x^{p-(k+1)}+a_{k+2}x^{p-(k+2)}+\cdots+a_{p-1}x+a_p) \tag{4.1}$$

したがって

定理 10　（4.1）より次の漸化式を得る．

$$x_{n+1}^{p-k}=\frac{(m-1)x_n^p-(a_{k+1}x_n^{p-(k+1)}+a_{k+2}x_n^{p-(k+2)}+\cdots+a_{p-1}x_n+a_p)}{mx_n^k+a_1x_n^{k-1}+a_2x_n^{k-2}+\cdots+a_{k-1}x_n+a_k} \tag{4.2}$$

$$(k=1,2,\cdots,p-1)$$

あるいは書き直して次式となる．

$$x_n^q=\frac{(m-1)x_n^p-a_{p-(q-1)}x_n^{q-1}-a_{p-(q-2)}x_n^{q-2}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{mx_n^{p-q}+a_1x_n^{p-(q+1)}+a_2x_n^{p-(q+2)}+\cdots+a_{p-(q+1)}x_n^{p-(q+(p-(q+1)))}+a_{p-q}x_n^{p-(q+(p-q))}} \tag{4.3}$$

$$(q=1,2,\cdots,p-1)$$

$m=1$ のとき次式となる．

$$x_{n+1}^{p-k}=\frac{-a_{k+1}x_n^{p-(k+1)}-a_{k+2}x_n^{p-(k+2)}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{x_n^k+a_1x_n^{k-1}+a_2x_n^{k-2}+\cdots+a_{k-1}x_n+a_k} \tag{4.4}$$

$$(k=1,2,\cdots,p-1)$$

$$x_n^q=\frac{-a_{p-(q-1)}x_n^{q-1}-a_{p-(q-2)}x_n^{q-2}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{x_n^{p-q}+a_1x_n^{p-(q+1)}+a_2x_n^{p-(q+2)}+\cdots+a_{p-(q+1)}x_n^{p-(q+(p-(q+1)))}+a_{p-q}x_n^{p-(q+(p-q))}} \tag{4.5}$$

$$(q=1,2,\cdots,p-1)$$

系　11　（4.2）の $p-k$ 乗根は次式となる．

$$x_{n+1}=\left(\frac{(m-1)x_n^p-(a_{k+1}x_n^{p-(k+1)}+a_{k+2}x_n^{p-(k+2)}+\cdots+a_{p-1}x_n+a_p)}{mx_n^k+a_1x_n^{k-1}+a_2x_n^{k-2}+\cdots+a_{k-1}x_n+a_k}\right)^{1/(p-k)} \tag{4.6}$$

$$(k=1,2,\cdots,p-2)$$

（4.3）の q 乗根は次式となる．

$$x_{n+1}=\left(\frac{(m-1)x_n^p-a_{p-(q-1)}x_n^{q-1}-a_{p-(q-2)}x_n^{q-2}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{mx_n^{p-q}+a_1x_n^{p-(q+1)}+a_2x_n^{p-(q+2)}+\cdots+a_{p-(q+1)}x_n^{p-(q+(p-(q+1)))}+a_{p-q}x_n^{p-(q+(p-q))}}\right)^{1/q} \tag{4.7}$$

$$(q=1,2,\cdots,p-2)$$

例　6　4次方程式

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \tag{4.8}$$

を式変形する．

$$x_{n+1}=\frac{(m-1)x_n^4-a_4}{mx_n^3+a_1x_n^2+a_2x_n+a_3} \tag{4.9}$$

$$x_{n+1}^2=\frac{(m-1)x_n^4-a_3x_n-a_4}{mx_n^2+a_1x_n+a_2} \tag{4.10}$$

$$x_{n+1}=\left(\frac{(m-1)x_n^4-a_3x_n-a_4}{mx_n^2+a_1x_n+a_2}\right)^{1/2} \tag{4.11}$$

$$x_{n+1}^3=\frac{(m-1)x_n^4-a_2x_n^2-a_3x_n-a_4}{mx_n+a_1} \tag{4.12}$$

これは（2.5）において，$p=4$ のときに得られる式と同じである．

$$x_{n+1}=\left(\frac{(m-1)x_n^4-a_2x_n^2-a_3x_n-a_4}{mx_n+a_1}\right)^{1/3} \tag{4.13}$$

５．村瀬義益の逐次近似法の拡張定理Ⅳ

この§は本稿の main §である．ここではニュートンの拡張漸化式とさらに村瀬の拡張漸化式を与える．そしてこれらの関連を与える．定理 31 は本稿の main theorem である．

A．よく知られる有名なニュートン法の定義から出発しよう．

定義　12　代数方程式 $f(x)=0$ の解 α を求める漸化式（反復式）

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{5.1}$$

を**ニュートン・ラフソン法**という．単に**ニュートン法**あるいは**ニュートンの漸化式（反復式）**ともいう．ニュートン法は収束が早く，実根はもとより，複素計算をすれば複素根も求められるので，現在最もよく用いられている．これは最初に初期値を与えなければならない．

この漸化式（5.1）はテイラー（Taylor）展開して得られる．すなわち x_0 を解 α に十分近いとし，$\alpha=x_0+h$ とする．$f(x_0+h)$ を h でテイラー展開する．

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}h^3+\cdots\cdots=0 \tag{5.2}$$

$f'(x_0) \neq 0$ とする．第 3 項以下を省略し，

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot h \fallingdotseq 0 \tag{5.3}$$

とする．したがって

$$h \fallingdotseq -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{5.4}$$

$\alpha = x_0 + h$ から，

$$\alpha \fallingdotseq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{5.5}$$

となり，x_0 は $-f(x_0)/f'(x_0)$ だけ補正される．ゆえに（5.4）を**補正値**というとにする（永坂［8, p. 45]）．以下同様にして漸化式（5.1）が導かれる．

ニュートンの漸化式の幾何学的意味

$y = f(x)$ のグラフ上の適当な点 $P_0(x_0,\ f(x_0))$ における接線の方程式は

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{5.6}$$

である．この接線が x 軸と交わる x 座標は

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{5.7}$$

である．この値を x_1 とおくと，これは x_0 より解 α に近い値となる（図2)．つぎに点 $P_1(x_1, f(x_1))$ における接線の方程式は

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \tag{5.8}$$

である．この接線が x 軸と交わる x 座標は

$$x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{5.9}$$

である．この値を x_2 とおくと，これは x_1 より α に近い値となる．そこで数列 $\{x_n\}$ を（5.1）の漸化式できめて，解 α を求める方法である．

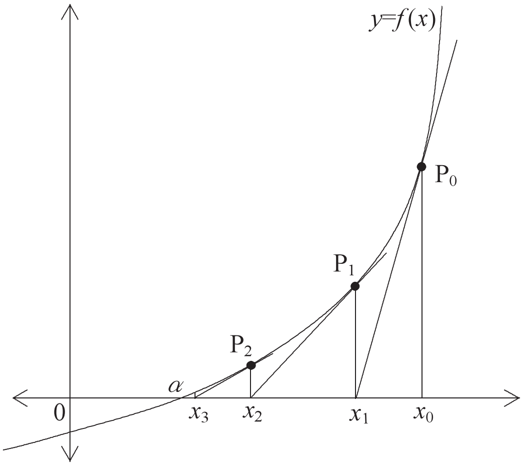

図２

ニュートン（Isaac Newton，1642－1727，イギリス）はケンブリッジ大学で学び，1669年にそこのルーカス教授になった．ルーカス教授とは，ケンブリッジ大学の数学関連分野の教授職の一つである．2008年現在のルーカス教授は，1980年に選任された理論物理学者のスティーヴン・ホーキング（Stephen Hawking，1942－　）である．ニュートンは，ニュートン物理学（力学）を建設し，近代物理学を確立した．

ニュートンは1665年から1667年にかけて，微分積分法，万有引力，色彩理論の３大発見をした．1687年に『プリンキピア』（*Principia*，自然哲学の数学的原理）を出版した．この書は，プトレマイオス（約85－165）の『アルマゲスト』，コペルニクス（1473－1543）の『天体の軌道について』（1543）と並び，天文学上の３大古典に数えられている．

B．ニュートンの拡張漸化式を与える．

例　７　５次方程式

$$x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0 \tag{5.10}$$

を式変形する．

$$x(x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)=-a_5 \tag{5.11}$$

$$x(5x^4+4a_1x^3+3a_2x^2+2a_3x+a_4)-4x^5-3a_1x^4-2a_2x^3-a_3x^2=-a_5 \tag{5.12}$$

$$x=\frac{4x^5+3a_1x^4+2a_2x^3+a_3x^2-a_5}{5x^4+4a_1x^3+3a_2x^2+2a_3x+a_4} \tag{5.13}$$

$$\therefore\quad x=\frac{(m-1)x^5+3a_1x^4+2a_2x^3+a_3x^2-a_5}{mx^4+4a_1x^3+3a_2x^2+2a_3x+a_4} \tag{5.14}$$

これを一般化すると

定理 13　p 次方程式（$p \geqq 2$）　$x^p + a_1 x^{p-1} + a_2 x^{p-2} + \cdots + a_{p-1} x + a_p = 0$　(2.4)

では次の漸化式となる.

$$x_{n+1} = \frac{(m-1)x_n^p + (p-2)a_1 x_n^{p-1} + \cdots + 2a_{p-3}x_n^3 + a_{p-2}x_n^2 - a_p}{mx_n^{p-1} + (p-1)a_1 x_n^{p-2} + \cdots + 3a_{p-3}x_n^2 + 2a_{p-2}x_n + a_{p-1}} \tag{5.15}$$

(5.15) は $m = p$ のとき，ニュートンの漸化式となる.

証　明　簡単のため $p=5$ の場合の (5.14) で証明する.

$$x_{n+1} = \frac{4x_n^5 + 3a_1 x_n^4 + 2a_2 x_n^3 + a_3 x_n^2 - a_5}{5x_n^4 + 4a_1 x_n^3 + 3a_2 x_n^2 + 2a_3 x_n + a_4} \tag{5.16}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4x_n^5 + 3a_1 x_n^4 + 2a_2 x_n^3 + a_3 x_n^2 - a_5}{5x_n^4 + 4a_1 x_n^3 + 3a_2 x_n^2 + 2a_3 x_n + a_4} - x_n \tag{5.17}$$

$$= \frac{4x_n^5 + 3a_1 x_n^4 + 2a_2 x_n^3 + a_3 x_n^2 - a_5 - x_n(5x_n^4 + 4a_1 x_n^3 + 3a_2 x_n^2 + 2a_3 x_n + a_4)}{5x_n^4 + 4a_1 x_n^3 + 3a_2 x_n^2 + 2a_3 x_n + a_4}$$

$$= -\frac{x_n^5 + a_1 x_n^4 + a_2 x_n^3 + a_3 x_n^2 + a_4 x_n + a_5}{5x_n^4 + 4a_1 x_n^3 + 3a_2 x_n^2 + 2a_3 x_n + a_4} \tag{5.18}$$

$$\therefore \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Q.E.D.

例　8　6 次方程式

$$x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x + a_6 = 0 \tag{5.19}$$

を式変形する.

$$x^2(x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4) = -a_5 x - a_6 \tag{5.20}$$

$$x^2(30x^4 + 20a_1 x^3 + 12a_2 x^2 + 6a_3 x + 2a_4) = 29x^6 + 19a_1 x^5 + 11a_2 x^4 + 5a_3 x^3 + a_4 x^2 - a_5 x - a_6 \tag{5.21}$$

$$x^2 = \frac{29x^6 + 19a_1 x^5 + 11a_2 x^4 + 5a_3 x^3 + a_4 x^2 - a_5 x - a_6}{30x^4 + 20a_1 x^3 + 12a_2 x^2 + 6a_3 x + 2a_4} \tag{5.22}$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{(m-1)x^6 + 19a_1 x^5 + 11a_2 x^4 + 5a_3 x^3 + a_4 x^2 - a_5 x - a_6}{mx^4 + 20a_1 x^3 + 12a_2 x^2 + 6a_3 x + 2a_4} \tag{5.23}$$

(5.23) を一般化する.

定理 14　p 次方程式 ($p \geqq 2$)

$$x^p + a_1 x^{p-1} + a_2 x^{p-2} + \cdots + a_{p-1} x + a_p = 0 \tag{2.4}$$

のとき, (5.23) を拡張すると次式となる.

$$x_{n+1}^2 = \frac{(m-1)x_n^p + ((p-1)(p-2)-1)a_1 x_n^{p-1} + ((p-2)(p-3)-1)a_2 x_n^{p-2} + \cdots + a_{p-2}x_n^2 - a_{p-1}x_n - a_p}{mx_n^{p-2} + (p-1)(p-2)a_1 x_n^{p-3} + (p-2)(p-3)a_2 x_n^{p-4} + \cdots + 3\cdot 2a_{p-3}x_n + 2a_{p-2}} \tag{5.24}$$

同様にして, (5.19) から漸化式

$$x_{n+1}^3 = \frac{(6\cdot 5\cdot 4-1)x_n^6 + (5\cdot 4\cdot 3-1)a_1 x_n^5 + (4\cdot 3\cdot 2-1)a_2 x_n^4 + (3\cdot 2\cdot 1-1)a_3 x_n^3 - a_4 x_n^2 - a_5 x_n - a_6}{6\cdot 5\cdot 4x_n^3 + 5\cdot 4\cdot 3a_1 x_n^2 + 4\cdot 3\cdot 2a_2 x_n + 3\cdot 2\cdot 1a_3} \tag{5.25}$$

$$x_{n+1}^3 = \frac{(m-1)x_n^6 + (5\cdot 4\cdot 3-1)a_1 x_n^5 + (4\cdot 3\cdot 2-1)a_2 x_n^4 + (3\cdot 2\cdot 1-1)a_3 x_n^3 - a_4 x_n^2 - a_5 x_n - a_6}{mx_n^3 + 5\cdot 4\cdot 3a_1 x_n^2 + 4\cdot 3\cdot 2a_2 x_n + 3\cdot 2\cdot 1a_3} \tag{5.26}$$

を得る. さらにこの規則性から一般に

定理 15　p 次方程式 ($p \geqq 2$)

$$x^p + a_1 x^{p-1} + a_2 x^{p-2} + \cdots + a_{p-1} x + a_p = 0 \tag{2.4}$$

のとき, 次の漸化式を得る.

$$x_{n+1}^q = \frac{B}{A} \ (q = 2, \cdots, p-1) \tag{5.27}$$

$$A = mx_n^{p-q} + ((p-1)(p-2)\cdots(p-q))a_1 x_n^{p-(q+1)} + ((p-2)(p-3)\cdots(p-(q+1)))a_2 x_n^{p-(q+2)} + \cdots$$
$$\cdots + ((q+2)(q+1)\cdots 4\cdot 3)a_{p-q-2}x_n^2 + ((q+1)q\cdots 3\cdot 2)a_{p-q-1}x_n + q!a_{p-q} \quad ,$$
$$B = (m-1)x_n^p + ((p-1)(p-2)\cdots(p-q))-1)a_1 x_n^{p-1} + ((p-2)(p-3)\cdots(p-(q+1)))-1)a_2 x_n^{p-2} + \cdots$$
$$\cdots + (q!-1)a_{p-q}x_n^q - a_{p-(q-1)}x_n^{q-1} - a_{p-(q-2)}x_n^{q-2} - \cdots - a_{p-2}x_n^2 - a_{p-1}x_n - a_p$$

系　16　(1)　(5.27) の q 乗根は次式となる.

$$x_{n+1} = \left(\frac{B}{A}\right)^{1/q} (q = 2, \cdots, p-1) \tag{5.28}$$

⑵　漸化式（5. 27）は $p=3$ のとき，村瀬の拡張漸化式（2. 3）に一致しない.

定義 17　（5. 15），（5. 27）の右辺を**ニュートンの拡張漸化式**といい，${}^{N}x^{q}_{n+1,m}$ で表す．さらに $m=\alpha$ のとき，${}^{N}x^{q}_{n+1,m=\alpha}$ で表す.

ニュートンの拡張漸化式（5. 15）で $m=p$ のとき，ニュートンの漸化式となった．漸化式（5. 24）のときは，$m=p(p-1)$ のとき

$$ {}^{N}x^{2}_{n+1,m=p(p-1)}=x_n^2-\frac{f(x_n)}{f''(x_n)} \tag{5.29} $$

となる．さらに漸化式（5. 25）から，

$$ {}^{N}x^{3}_{n+1,m=6\cdot5\cdot4}=x_n^3-\frac{f(x_n)}{f'''(x_n)} \tag{5.30} $$

を得る．したがって，この規則性から一般に

定理 18　p 次方程式（2. 4）から得られる（5. 27）のニュートンの拡張漸化式 ${}^{N}x^{q}_{n+1}$ に関して，$m=p(p-1)(p-2)\cdots(p-(q-1))$ のとき，次式を得る.

$$ {}^{N}x^{q}_{n+1,m=p(p-1)\cdots(p-(q-1))}=x_n^q-\frac{f(x_n)}{f^{(q)}(x_n)} \tag{5.31} $$

$$ {}^{N}x_{n+1,m=p(p-1)\cdots(p-(q-1))}=\left(x_n^q-\frac{f(x_n)}{f^{(q)}(x_n)}\right)^{1/q} \tag{5.32} $$

C. 例 1 の 2 次方程式

$$ x^2+a_1x+a_2=0 \tag{2.8} $$

の場合，村瀬の拡張漸化式（2. 5）は $m=2$ のとき

$$ x_{n+1}=\frac{x_n^2-a_2}{2x_n+a_1} \tag{2.9'} $$

となる．一方，ニュートンの漸化式（5. 1）も（2. 9'）と同じくなる．したがって簡単ではあるが，驚くべき重要な定理が得られる．すなわち

定理 19　2 次方程式の場合，村瀬の拡張漸化式

$$ x^{p-1}_{n+1}=\frac{(m-1)x_n^p-a_2x_n^{p-2}-a_3x_n^{p-3}-\cdots-a_{p-1}x_n-a_p}{mx_n+a_1} \tag{2.5} $$

はニュートン法を含む.

D. さらに村瀬の拡張漸化式を与える.

例 9 3次方程式

$$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \tag{2.10}$$

を式変形する.

x で括る.

$$x(3x^2+2a_1x+a_2)=2x^3+a_1x^2-a_3 \tag{5.33}$$

$$x=\frac{2x^3+a_1x^2-a_3}{3x^2+2a_1x+a_2}$$

$$=\frac{(m-1)x^3+a_1x^2-a_3}{mx^2+2a_1x+a_2}$$

ここで 2 つの項に分ける.

$$=\frac{(m-2)x^3-a_2x-2a_3}{mx^2+2a_1x+a_2}+\frac{x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}{mx^2+2a_1x+a_2} \tag{5.34}$$

ここで $x=$第 1 項とおくと

$$x=\frac{(m-2)x^3-a_2x-2a_3}{mx^2+2a_1x+a_2} \tag{5.35}$$

これを整理すると

$$2f(x)=0 \qquad \therefore \quad f(x)=0$$

したがって,(5. 35) から 3 次方程式の漸化式

$$x_{n+1}=\frac{(m-2)x_n^3-a_2x_n-2a_3}{mx_n^2+2a_1x_n+a_2} \tag{5.36}$$

を得る.

(5. 34) において, 特に $m=3$ のとき次式となる.

$$x=\frac{x^3-a_2x-2a_3}{3x^2+2a_1x+a_2}+\frac{x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}{3x^2+2a_1x+a_2}$$

$$=\frac{x^3-a_2x-2a_3}{f'(x)}+\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{5.37}$$

x^2 で括る.

$$x^2(3 \cdot 2x + 2 \cdot 1a_1) = 5x^3 + a_1x^2 - a_2x - a_3 \tag{5.38}$$

$$x^2 = \frac{5x^3 + a_1x^2 - a_2x - a_3}{3 \cdot 2x + 2 \cdot 1a_1}$$

$$= \frac{(m-1)x^3 + a_1x^2 - a_2x - a_3}{mx + 2 \cdot 1a_1}$$

$$= \frac{(m-2)x^3 - 2a_2x - 2a_3}{mx + 2 \cdot 1a_1} + \frac{x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3}{mx + 2 \cdot 1a_1} \tag{5.39}$$

ここで x^2＝第 1 項とおくと

$$x^2 = \frac{(m-2)x^3 - 2a_2x - 2a_3}{mx + 2 \cdot 1a_1} \tag{5.40}$$

これを整理すると

$$2f(x) = 0 \qquad \therefore \quad f(x) = 0$$

したがって,（5.40）から 3 次方程式の漸化式

$$x_{n+1}^2 = \frac{(m-2)x_n^3 - 2a_2x_n - 2a_3}{mx_n + 2 \cdot 1a_1} \tag{5.41}$$

が得られる.

（5.39）において, 特に $m = 3 \cdot 2$ のとき

$$x^2 = \frac{4x^3 - 2a_2x - 2a_3}{3 \cdot 2x + 2 \cdot 1a_1} + \frac{x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3}{3 \cdot 2x + 2 \cdot 1a_1}$$

$$= \frac{4x^3 - 2a_2x - 2a_3}{f''(x)} + \frac{f(x)}{f''(x)} \tag{5.42}$$

を得る.

例　10　村瀬の 3 次方程式を式変形する.

$$x^3 - 14x^2 + 48 = 0 \tag{1.2}$$

$$x = \frac{(m-2)x^3 - 96}{mx^2 - 28x} + \frac{x^3 - 14x^2 + 48}{mx^2 - 28x} \tag{5.43}$$

$$x^2 = \frac{(m-2)x^3 - 96}{mx - 28} + \frac{x^3 - 14x^2 + 48}{mx - 28} \tag{5.44}$$

ここで x^2＝第 1 項 とおいて漸化式をつくると

$$x_{n+1}^2=\frac{(m-2)x_n^3-96}{mx_n-28} \tag{5.45}$$

を得る．ここで $m=0,2,4$ とおくと，村瀬の第 1, 2, 3 法の（1. 3）, (1. 4), (1. 5)が得られる．

したがって

定理 20　(5. 41), (5. 45) は村瀬の（1. 3）, (1. 4), (1. 5)の拡張漸化式である．

定理 21　(5. 35), (5. 40)を p 次方程式（2. 4）に拡張すると以下の漸化式を得る．

$$x^p+a_1x^{p-1}+a_2x^{p-2}+\cdots+a_{p-1}x+a_p=0 \tag{2.4}$$

$$x_{n+1}=\frac{(m-2)x_n^p+((p-1)-2)a_1x_n^{p-1}+((p-2)-2)a_2x_n^{p-2}+\cdots+(3-2)a_{p-3}x_n^3-a_{p-1}x_n-2a_p}{mx_n^{p-1}+(p-1)a_1x_n^{p-2}+(p-2)a_2x_n^{p-3}+\cdots+3a_{p-3}x_n^2+2a_{p-2}x_n+a_{p-1}} \tag{5.46}$$

$$x_{n+1}^2=\frac{(m-2)x_n^p+((p-1)(p-2)-2)a_1x_n^{p-1}+((p-2)(p-3)-2)a_2x_n^{p-2}+\cdots}{mx_n^{p-2}+(p-1)(p-2)a_1x_n^{p-3}+(p-2)(p-3)a_2x_n^{p-4}+\cdots+2\cdot1a_{p-2}}$$
$$+\frac{\cdots+(3\cdot2-2)a_{p-3}x_n^3-2a_{p-1}x_n-2a_p}{mx_n^{p-2}+(p-1)(p-2)a_1x_n^{p-3}+(p-2)(p-3)a_2x_n^{p-4}+\cdots+2\cdot1a_{p-2}} \tag{5.47}$$

$$x_{n+1}^q=\frac{B}{A}(q=3,\cdots,p-1) \tag{5.48}$$

$$A=mx_n^{p-q}+(p-1)(p-2)\cdots(p-q)a_1x_n^{p-(q+1)}+(p-2)(p-3)\cdots(p-(q+1))a_2x_n^{p-(q+2)}+\cdots$$
$$\cdots+(q+1)!a_{p-q-1}x_n+q!a_{p-q}\quad,$$

$$B=(m-2)x_n^p+((p-1)(p-2)\cdots(p-q)-2)a_1x_n^{p-1}+((p-2)(p-3)\cdots(p-(q+1))-2)a_2x_n^{p-2}+\cdots$$
$$\cdots+(q!-2)a_{p-q}x_n^q-2a_{p-q+1}x_n^{q-1}-2a_{p-q+2}x_n^{q-2}-\cdots-2a_{p-1}x_n-2a_p$$

証　明　簡単のため，6 次方程式

$$x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6=0 \tag{5.19}$$

について証明する．すなわちすべての漸化式 $x_{n+1}^q(q=1,\cdots,5)$ を与える．

$$x_{n+1}=\frac{(m-2)x_n^6+3a_1x_n^5+2a_2x_n^4+a_3x_n^3-a_5x_n-2a_6}{mx_n^5+5a_1x_n^4+4a_2x_n^3+3a_3x_n^2+2a_4x_n+a_5} \tag{5.49}$$

$$x_{n+1}^2=\frac{(m-2)x_n^6+18a_1x_n^5+10a_2x_n^4+4a_3x_n^3-2a_5x_n-2a_6}{mx_n^4+20a_1x_n^3+12a_2x_n^2+6a_3x_n+2a_4} \tag{5.50}$$

$$x_{n+1}^3=\frac{(m-2)x_n^6+58a_1x_n^5+22a_2x_n^4+4a_3x_n^3-2a_4x_n^2-2a_5x_n-2a_6}{mx_n^3+60a_1x_n^2+24a_2x_n+6a_3} \tag{5.51}$$

$$x_{n+1}^4=\frac{(m-2)x_n^6+118a_1x_n^5+22a_2x_n^4-2a_3x_n^3-2a_4x_n^2-2a_5x_n-2a_6}{mx_n^2+120a_1x_n+24a_2} \tag{5.52}$$

$$x_{n+1}^5=\frac{(m-2)x_n^6+118a_1x_n^5-2a_2x_n^4-2a_3x_n^3-2a_4x_n^2-2a_5x_n-2a_6}{mx_n+120a_1} \tag{5.53}$$

(5.49)～(5.53)において，$x^q\times$分母＝分子 より $2f(x)=0$ を得る．　Q.E.D.

村瀬の拡張漸化式(5.46)～(5.48)を与えたが，その収束性が問題となる．

定義 22　村瀬の拡張漸化式(5.46)～(5.48)を ${}^Mx_{n+1}^q$ で表し，特に $m=\alpha$ のとき ${}^Mx_{n+1,\,m=\alpha}^q$ で表す．ここで ${}^Mx_{n+1,\,m=p(p-1)\cdots(p-(q-1))}^q$ の分母は $f^{(q)}(x_n)$ である．

定理 21 の証明で見たように，次が成り立つ．

系　23　村瀬の拡張漸化式

$${}^Mx_{n+1}^q=\frac{B}{A} \tag{5.46～5.48}$$

から次式を得る．

$$x^{p-q}A-B=2f(x) \tag{5.54}$$

特に，${}^Mx_{n+1,\,m=p(p-1)\cdots(p-(q-1))}^q$ のとき次式となる．

$$x^{p-q}f^{(q)}(x)-B=2f(x) \tag{5.55}$$

E．ニュートンの拡張漸化式と村瀬の拡張漸化式の関連を与える．

定理 24　ニュートンの拡張漸化式 ${}^Nx_{n+1,\,m=p(p-1)\cdots(p-(q-1))}^q$ と村瀬の拡張漸化式 ${}^Mx_{n+1,\,m=p(p-1)\cdots(p-(q-1))}^q$ の間には，次のような関連がある．

$${}^Nx_{n+1,\,m=p(p-1)\cdots(p-(q-1))}^q={}^Mx_{n+1,\,m=p(p-1)\cdots(p-(q-1))}^q+\frac{f(x_n)}{f^{(q)}(x_n)} \tag{5.56}$$

証明概略　定理 21 の証明の続きとして証明する．（5.56）の右辺を $q=1, \cdots, 5$ まですべて表す．

$$\frac{(6-2)x_n^6+3a_1x_n^5+2a_2x_n^4+a_3x_n^3-a_5x_n-2a_6}{6x_n^5+5a_1x_n^4+4a_2x_n^3+3a_3x_n^2+2a_4x_n+a_5}+\frac{x_n^6+a_1x_n^5+a_2x_n^4+a_3x_n^3+a_4x_n^2+a_5x_n+a_6}{6x_n^5+5a_1x_n^4+4a_2x_n^3+3a_3x_n^2+2a_4x_n+a_5} \tag{5.57}$$

$$\frac{(30-2)4x_n^6+18a_1x_n^5+10a_2x_n^4+4a_3x_n^3-2a_5x_n-2a_6}{30x_n^4+20a_1x_n^3+12a_2x_n^2+6a_3x_n+2a_4}+\frac{x_n^6+a_1x_n^5+a_2x_n^4+a_3x_n^3+a_4x_n^2+a_5x_n+a_6}{30x_n^4+20a_1x_n^3+12a_2x_n^2+6a_3x_n+2a_4} \tag{5.58}$$

$$\frac{(120-2)x_n^6+58a_1x_n^5+22a_2x_n^4+4a_3x_n^3-2a_4x_n^2-2a_5x_n-2a_6}{120x_n^3+60a_1x_n^2+24a_2x_n+6a_3}+\frac{x_n^6+a_1x_n^5+a_2x_n^4+a_3x_n^3+a_4x_n^2+a_5x_n+a_6}{120x_n^3+60a_1x_n^2+24a_2x_n+6a_3} \tag{5.59}$$

$$\frac{(360-2)x_n^6+118a_1x_n^5+22a_2x_n^4-2a_3x_n^3-2a_4x_n^2-2a_5x_n-2a_6}{360x_n^2+120a_1x_n+24a_2}+\frac{x_n^6+a_1x_n^5+a_2x_n^4+a_3x_n^3+a_4x_n^2+a_5x_n+a_6}{360x_n^2+120a_1x_n+24a_2} \tag{5.60}$$

$$\frac{(720-2)x_n^6+118a_1x_n^5-2a_2x_n^4-2a_3x_n^3-2a_4x_n^2-2a_5x_n-2a_6}{720x_n+120a_1}+\frac{x_n^6+a_1x_n^5+a_2x_n^4+a_3x_n^3+a_4x_n^2+a_5x_n+a_6}{720x_n+120a_1} \tag{5.61}$$

これらは ${}^{N}x^{q}_{n+1,\,m=p(p-1)\cdots(p-(q-1))}$（$q=1, \cdots, 5$）を定理の 2 つの項に分解したものである．　Q.E.D.

（5.56）を $q=1$ のとき式変形する．

$$ {}^{N}x_{n+1,\,m=p}={}^{M}x_{n+1,\,m=p}+\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.62}$$

$$ x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}={}^{M}x_{n+1,\,m=p}+\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.63}$$

したがって

系 25　（5.63）より，次の漸化式を得る．

$$ {}^{M}x_{n+1,\,m=p}-{}^{N}x_{n+1,\,m=p}=\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.64}$$

$$ {}^{M}x_{n+1,\,m=p}=x_n-2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.65}$$

例　11　3次方程式

$$f(x)=x^3-6x^2+11x-6=0 \tag{5.66}$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0 \tag{5.67}$$

のとき

$${}^{M}x_{n+1,\,m=3}=x_n-2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.68}$$

$$=x_n-2\frac{x_n^3-6x_n^2+11x-6}{3x_n^2-12x_n+11} \tag{5.69}$$

$$=\frac{x_n^3-11x_n+12}{3x_n^2-12x_n+11} \tag{5.70}$$

これは（5.46）の $p=3$, $m=3$ の場合と一致する．（5.69），（5.70）の数値計算をすると，解 $x=1$，2 が得られる．この場合，収束が遅いので，小数点以下 1 桁で計算した．

（5.65）を一般化する．

定理 26　p 次方程式

$$x^p+a_1x^{p-1}+a_2x^{p-2}+\cdots+a_{p-1}x+a_p=0 \tag{2.4}$$

のとき次式を得る．

$$x_{n+1}=x_n-k\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(k\neq 0, k\in \boldsymbol{R}) \tag{5.71}$$

系　27　（5.71）において，特に $k=1$ のときは，ニュートンの漸化式となる．

定義 28　（5.71）を**村瀬・ニュートンの拡張漸化式**といい，${}^{M,N}x_{n+1}$ で表す．

（5.71）を式変形する．

$$\frac{1}{k}\left({}^{M,N}x_{n+1}-x_n\right)+x_n=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.72}$$

したがって，

定理 29　村瀬・ニュートンの拡張漸化式 ${}^{M,N}x_{n+1}$ とニュートンの漸化式 ${}^{N}x_{n+1}$ には次のような関連がある.

$$\frac{1}{k}{}^{M,N}x_{n+1}+\frac{k-1}{k}x_n={}^{N}x_{n+1} \tag{5.73}$$

(5.73) は線分 ${}^{M,N}x_{n+1}x_n$ を $(k-1)/k:1/k$ に内分する点が ${}^{N}x_{n+1}$ であるという面白い公式である（三重大学　新田貴士教授による指摘).

定義 30　$f(x)$ の q 次導関数 $f^{(q)}(x)$ の最高次数の項は

$$p(p-1)(p-2)\cdots(p-(q-1))x^{p-q}$$

である．この係数 $p(p-1)(p-2)\cdots(p-(q-1))$ を実数 $m(\neq 0)$ に置き換えた $f^{(q)}(x)$ を

$$[f^{(q)}(x)]_m$$

と表す.

本稿の主定理として，ニュートンの拡張漸化式 (5.31) と村瀬・ニュートンの拡張漸化式 (5.71) を合成して拡張する.

定理 31 (主定理)　漸化式

$$x_{n+1}^q=x_n^q-k\frac{f(x_n)}{[f^{(q)}(x_n)]_m}\ (k\neq 0, k\in \boldsymbol{R}) \tag{5.74}$$

は，k，q，m の値により以下のように switch する.
(i) $k=1$ のとき，ニュートンの拡張漸化式 (5.27) に等しい.
(ii) $k=2$ のとき，村瀬の拡張漸化式 (5.46)～(5.48) に等しい.
(iii) $q=1$，$m=p$ のとき，村瀬・ニュートンの拡張漸化式 (5.71) に等しい.

証　明　(i) 定理 18 の (5.31) より得られる.
(ii) (5.31) と (5.56) より得られる.　Q.E.D.

系　32　(5.74) の q 乗根は次式になる.

$$x_{n+1}=\left(x_n^q-k\frac{f(x_n)}{[f^{(q)}(x_n)]_m}\right)^{1/q}(k\neq 0, k\in \boldsymbol{R}) \tag{5.75}$$

定義 33　漸化式 (5.74) を**堀口の漸化式**といい，${}^{H}x_{n+1}^q$ で表す.

F．土倉保先生（東北大学名誉教授）のヒントにより，別な方法で別な村瀬の拡張漸化式が得られる．すなわち，

Step 1．p 次方程式（2.4）において，$x^{p-1}=t$ により変数変換して $f(t)$ を作る．
Step 2．この $f(t)$ に対して，ニュートンの漸化式（5.1）を適用する．
Step 3．得られた漸化式に対して，$x^{p-1}=t$ により変数 x の漸化式にする．

驚くべきことに，これは $m=p/(p-1)$ のときに（2.3）と一致する村瀬の拡張漸化式となる．さらにこの漸化式は，一見無関係に見える（5.74）と密接に関連することも判かってきた．したがってこの内容はその重要性により，本稿とは別に出版される．

村瀬は，これまで発見してきた拡張漸化式の基になる（1.3）～（1.5）の３種類の漸化式を1673年に考案した．村瀬の拡張漸化式は多彩であり，奥が深い．これまでのことに興味を持った読者は，さらにおもしろい漸化式の関連や新しい漸化式を発見することができれば幸いである．

６．コンピュータによる数値計算

村瀬は1630年頃から1710年頃の和算家である．当時，計算には算盤や算木を使っていた．一方，西洋ではパスカル（Blaise Pascal，1623-1662）が，1642年の19歳のとき，徴税（ちょうぜい）長官としての父の仕事を軽減するために，８桁までの数の加減算をデジタル式により計算できる歯車式計算機パスカリーヌを発明した．このように当時の計算機では，村瀬の漸化式やニュートン法の反復式を使うのに十分に対応できなかった．しかし現在はパソコンの時代であり，数値計算の実験が容易にできる．そこでわれわれはパソコンを使い（1.3），（1.4），（1.5），村瀬の拡張漸化式およびニュートン法の漸化式により計算を行う．表計算ソフトのExcelはプログラミングを知らなくても，簡単に関数計算，反復計算ができるので，これを用いる．

命題 34　Excelでは，16 進 6 桁で計算しているので高々 10 進約 7.2 桁の精度を持つが，出力は浮動小数点型では 10 進 10 桁まで，E型では有効 6 桁までとなっている（永坂秀子）．

計算は 10 桁出力で行う．

A．村瀬の第 1 法（1.3）の数値計算をExcelで行うには表 1 のようにセル内に計算式を入力する．

表１　X(i+1)＝SQRT((48＋X(i)^3)/14)

	A	B	C	D
1	i	x(i)	= (48+x(i)^3)/14	
2	0	x_0	= (48+B2^3)/14	
3	1	=SQRT(C2)	= (48+B3^3)/14	
4	2	=SQRT(C3)	= (48+B4^3)/14	
5	3	=SQRT(C4)	= (48+B5^3)/14	
6	4	=SQRT(C5)	= (48+B6^3)/14	
7	5	=SQRT(C6)	= (48+B7^3)/14	
8	6	=SQRT(C7)	= (48+B8^3)/14	

村瀬と同様に初期値 $x_0=0$ を入力すると表 2 のように単調増加しながら 2 に収束する．同様に村瀬の第 2，3 法の（1.4），（1.5）の計算表を作り，$x_0=0$ を入力すると表 3 の第 2 法は単調増加，表 4 の第 3 法は振動しながら解 2 に収束する．

表２第１法(3)

i	X(i)
0	0
1	1.8516402
2	1.970287881
3	1.993717368
4	1.998657496
5	1.999712493
6	1.999938399
7	1.9999868
8	1.999997171
9	1.999999394
10	1.99999987
11	1.999999972
12	1.999999994
13	1.999999999
14	2
15	2

表３第２法(4)

i	X(i)
0	0
1	1.8516402
2	1.987750154
3	1.99897996
4	1.999915002
5	1.999992917
6	1.99999941
7	1.999999951
8	1.999999996
9	2
10	2

表４第３法(5)

i	X(i)
0	0
1	1.8516402
2	2.011249646
3	1.998853108
4	2.000114462
5	1.999988552
6	2.000001145
7	1.999999886
8	2.000000011
9	1.999999999
10	2
11	2

われわれは初期値として $x_0=0$ により数値計算したが，0 以外の初期値を入力すれば即座に計算される．

B．村瀬の 3 次方程式

$$x^3-14x^2+48=0 \tag{1.2}$$

の左辺を $f(x)$ とおき，ニュートンの漸化式（5.1）に当てはめると

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3-14x_n^2+48}{3x_n^2-28x_n} \tag{6.1}$$

$$=\frac{2x_n^3-14x_n^2-48}{3x_n^2-28x_n} \tag{6.2}$$

となる．（6.2）をExcelで数値計算する．各セル内での計算式は表 5 である．

表 5　X(*i*+1)＝X(*i*)－(X(*i*)^3－14＊X(*i*)^2＋48)/(3＊X(*i*)^2－28＊X(*i*))

	A	B	C	D	E
1	i	X(i)	f(xi)	f'(xi)	f(xi)/f'(xi)
2	0	x_0	＝B2^3－14＊B2^2＋48	＝3＊B2^2－28＊B2	＝C2/D2
3	1	＝B2－E2	＝B3^3－14＊B3^2＋48	＝3＊B3^2－28＊B3	＝C3/D3
4	2	＝B3－E3	＝B4^3－14＊B4^2＋48	＝3＊B4^2－28＊B4	＝C4/D4
5	3	＝B4－E4	＝B5^3－14＊B5^2＋48	＝3＊B5^2－28＊B5	＝C5/D5
6	4	＝B5－E5	＝B6^3－14＊B6^2＋48	＝3＊B6^2－28＊B6	＝C6/D6

初期値を 0，0.1，0.2，0.3，0.4，0.5，1 としたときの計算結果は表 6～12 である．

表 6

i	X(i)
0	0
1	#DIV/0!
2	#DIV/0!
3	#DIV/0!
4	#DIV/0!
5	#DIV/0!

表 7 解

i	X(i)
0	0.1
1	17.37833935
2	14.83133538
3	13.8875862
4	13.74887572
5	13.74596796
6	13.74596669
7	13.74596669
8	13.74596669
9	13.74596669
10	13.74596669

表 8 解

i	X(i)
0	0.2
1	8.858394161
2	−19.30505927
3	−11.85038404
4	−7.093798724
5	−4.194759731
6	−2.596116161
7	−1.908845327
8	−1.754028563
9	−1.745988141
10	−1.745966693

表 9 解

i	X(i)
0	0.3
1	6.052398524
2	1.971111368
3	2.000154464
4	2.000000004
5	2
6	2
7	2

表 10 解

i	X(i)
0	0.4
1	4.674626866
2	2.290242503
3	2.012916104
4	2.000030093
5	2
6	2
7	2

表 11 解

i	X(i)
0	0.5
1	3.867924528
2	2.23460071
3	2.008709589
4	2.000013719
5	2
6	2
7	2

表 12 解

i	X(i)
0	1
1	2.4
2	2.023076923
3	2.00009547
4	2.000000002
5	2
6	2

C．Bと同様に $f(x)$ を，村瀬・ニュートンの拡張漸化式（5.71）に $k=0.5$ として適用する．

$$x_{n+1}=x_n-0.5\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{6.3}$$

$$=x_n-0.5\frac{x_n^3-14x_n^2+48}{3x_n^2-28x_n} \tag{6.4}$$

初期値を 0，0.1，0.2，0.3，0.4，0.5，1 としたときの計算結果は，表 13 ～ 19 である．

表 13

i	X(i)
0	0
1	#DIV/0!
2	#DIV/0!
3	#DIV/0!
4	#DIV/0!
5	#DIV/0!
6	#DIV/0!
7	#DIV/0!
8	#DIV/0!
9	#DIV/0!
10	#DIV/0!
11	#DIV/0!
12	#DIV/0!
13	#DIV/0!
14	#DIV/0!
15	#DIV/0!
16	#DIV/0!
17	#DIV/0!
18	#DIV/0!
19	#DIV/0!
20	#DIV/0!

表 14 解

i	X(i)
0	0.1
1	8.739169675
2	−2.61650527
3	−2.2659832
4	−2.04074598
5	−1.90572733
6	−1.82973128
7	−1.78896001
8	−1.76776254
9	−1.75694241
10	−1.7514744
11	−1.74872556
12	−1.74734738
13	−1.74665735
14	−1.7463121
15	−1.74613942
16	−1.74605306
17	−1.74600988
18	−1.74598829
19	−1.74597749
20	−1.74597738

表 15 解

i	X(i)
0	0.2
1	4.52919708
2	3.408731079
3	2.789243607
4	2.431145318
5	2.228750894
6	2.118529667
7	2.060454075
8	2.0305473
9	2.015356913
10	2.007699696
11	2.003855212
12	2.001928954
13	2.000964815
14	2.000482492
15	2.000241267
16	2.000120639
17	2.000060321
18	2.000030161
19	2.00001508
20	2.00001493

表 16 解

i	X(i)
0	0.3
1	3.176199262
2	2.654686447
3	2.354300782
4	2.186434637
5	2.09604486
6	2.048813756
7	2.024617153
8	2.012362845
9	2.006195212
10	2.003101082
11	2.001551414
12	2.000775925
13	2.000388017
14	2.000194022
15	2.000097015
16	2.000048508
17	2.000024254
18	2.000012127
19	2.000006064
20	2.000006003

表 17 解

i	X(i)
0	0.4
1	2.537313433
2	2.287981675
3	2.150356789
4	2.077056545
5	2.039043439
6	2.019657041
7	2.009863228
8	2.004940405
9	2.002472414
10	2.001236762
11	2.00061852
12	2.000309295
13	2.000154656
14	2.00007733
15	2.000038666
16	2.000019333
17	2.000009667
18	2.000004833
19	2.000002417
20	2.000002392

表 18 解

i	X(i)
0	0.5
1	2.183962264
2	2.094738127
3	2.048139602
4	2.024274391
5	2.012189975
6	2.006108395
7	2.003057577
8	2.001529637
9	2.000765031
10	2.000382569
11	2.000191298
12	2.000095652
13	2.000047827
14	2.000023914
15	2.000011957
16	2.000005978
17	2.000002989
18	2.000001495
19	2.000000747
20	2.00000074

表 19 解

i	X(i)
0	1
1	1.7
2	1.85994092
3	1.93191802
4	1.966398581
5	1.983304083
6	1.991677644
7	1.995845151
8	1.997924149
9	1.998962467
10	1.999481331
11	1.99974069
12	1.999870351
13	1.999935177
14	1.999967589
15	1.999983795
16	1.999991897
17	1.999995949
18	1.999997974
19	1.999998987
20	1.999998997

７．コンピュータによる数値計算の考察

ここでは，初期値と収束，収束の速さを考察する．

初期期値と収束　村瀬の拡張漸化式（2.3）は m が実数の場合に成り立つが，範囲が広くて考察しにくい．そこで以下では m が整数の場合に考察する．

（i）$m=0$ の場合は村瀬の第 1 法の（1.3）である．この漸化式の解は，図 3 のように曲線 $g(x)=x^2$ と３次曲線 $h(x)=(48+x^3)/14$ との交点である．この漸化式の数列 $\{x_n\}$ が解 2 に収束する様子をグラフを使いながら説明する．ここでグラフを描くのに便利なフリーソフトのBearGraphを使用した．

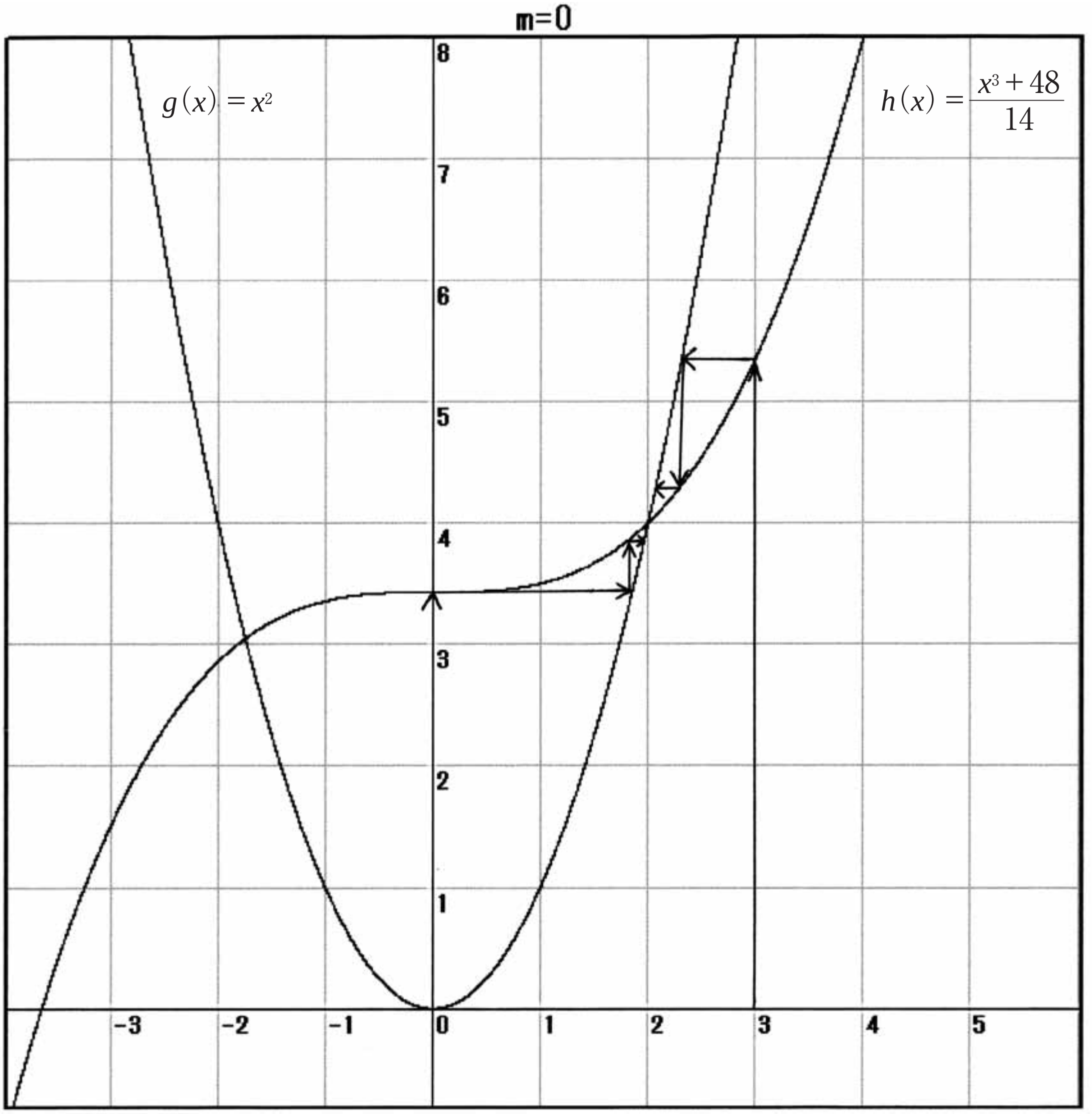

図 3 第 1 法

$g(x)$と $h(x)$ は $0 \le x \le 6+2\sqrt{15}$ では単調増加である．$0 \le x < 2$ では $g(x) < h(x)$ である．したがって初期値を $x_0=0$ とすると，$x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to \cdots$ は単調増加しながら 2 に収束する．グラフ上では，階段を上るようにして 4 に収束する．このような近づき方を**縮小写像**という．初期値が $0 \le x_0 < 2$ のときには，$\{x_n\}$ はこのような収束となる．初期値が $2 < x_0 < 6+2\sqrt{15}$ のときには，$g(x) > h(x)$ であるから，$\{x_n\}$ は単調減少して 2 に収束する．

図 4 は $m=-10$ の場合の2曲線である．$h(x)=(48+11x^3)/(14+10x)$ は $x=1.8$ 付近で単調減少から，単調増加になり，同じ高さの y が 2 箇所ある．したがって $0 \le x_0 < 2$ のとき，$\{x_n\}$ は単調増加して 2 に収束する．また $2 < x_0 < 6+2\sqrt{15}$ のときは $\{x_n\}$ は単調減少して 2 に収束する．このようなことは $m=-9, \cdots, -1$ の場合にも見られる．

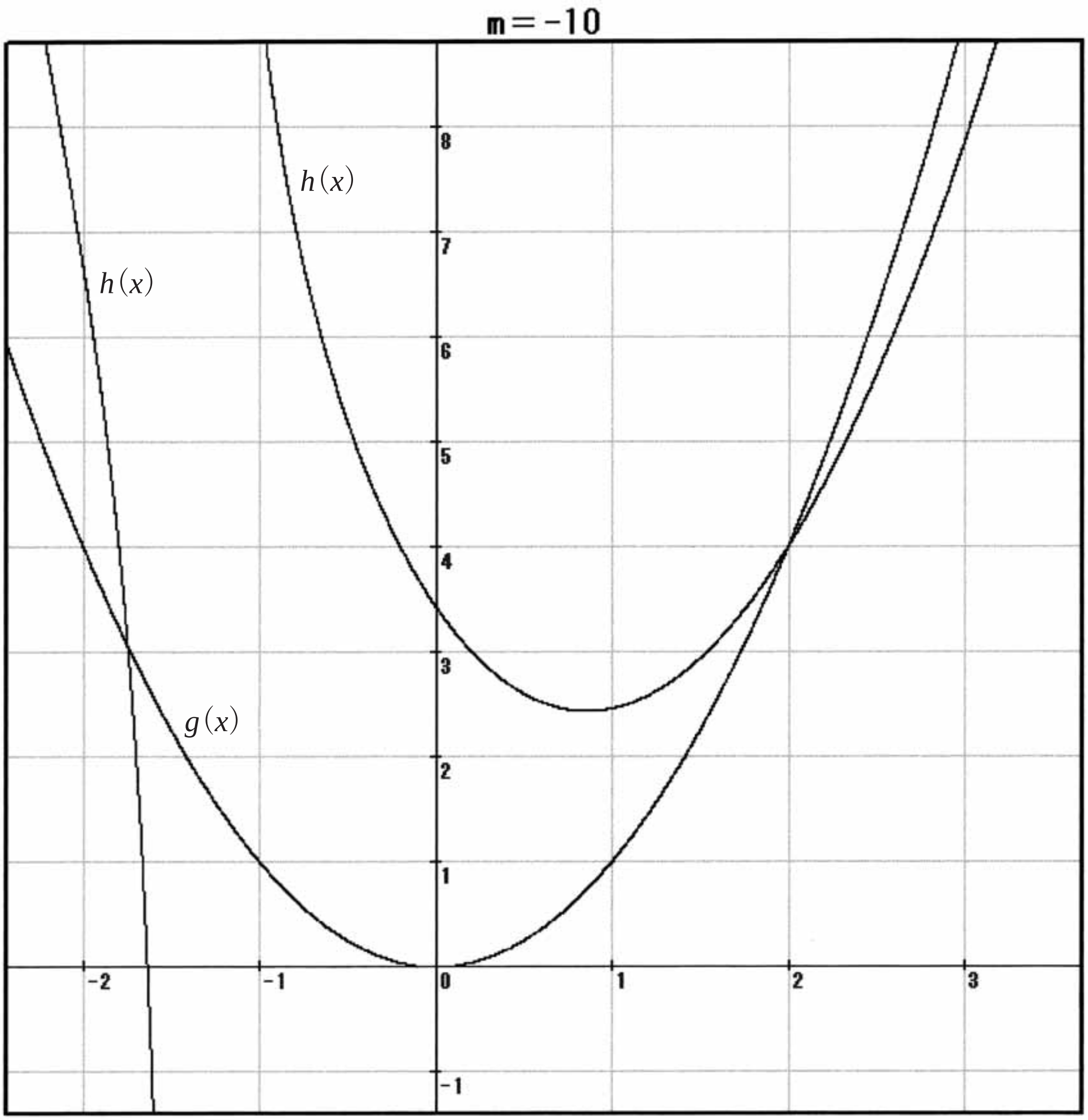

図４

(ii)　$m=1$ の場合は村瀬の第 2 法の（1.4）である．この漸化式の解は，図 5 のように曲線 $g(x)=x^2$ と双曲線 $h(x)=48/(14-x)$ との交点である．この場合 $h(x)$ は $x=14$ が漸近線である．$g(x)$ と $h(x)$ は $0\leq x\leq 6+2\sqrt{15}$ では単調増加であるから，(i) と同様にして，$\{x_n\}$ は $0<x_0<2$（$2<x_0<6+2\sqrt{15}$）では単調増加（単調減少）して 2 に収束する．

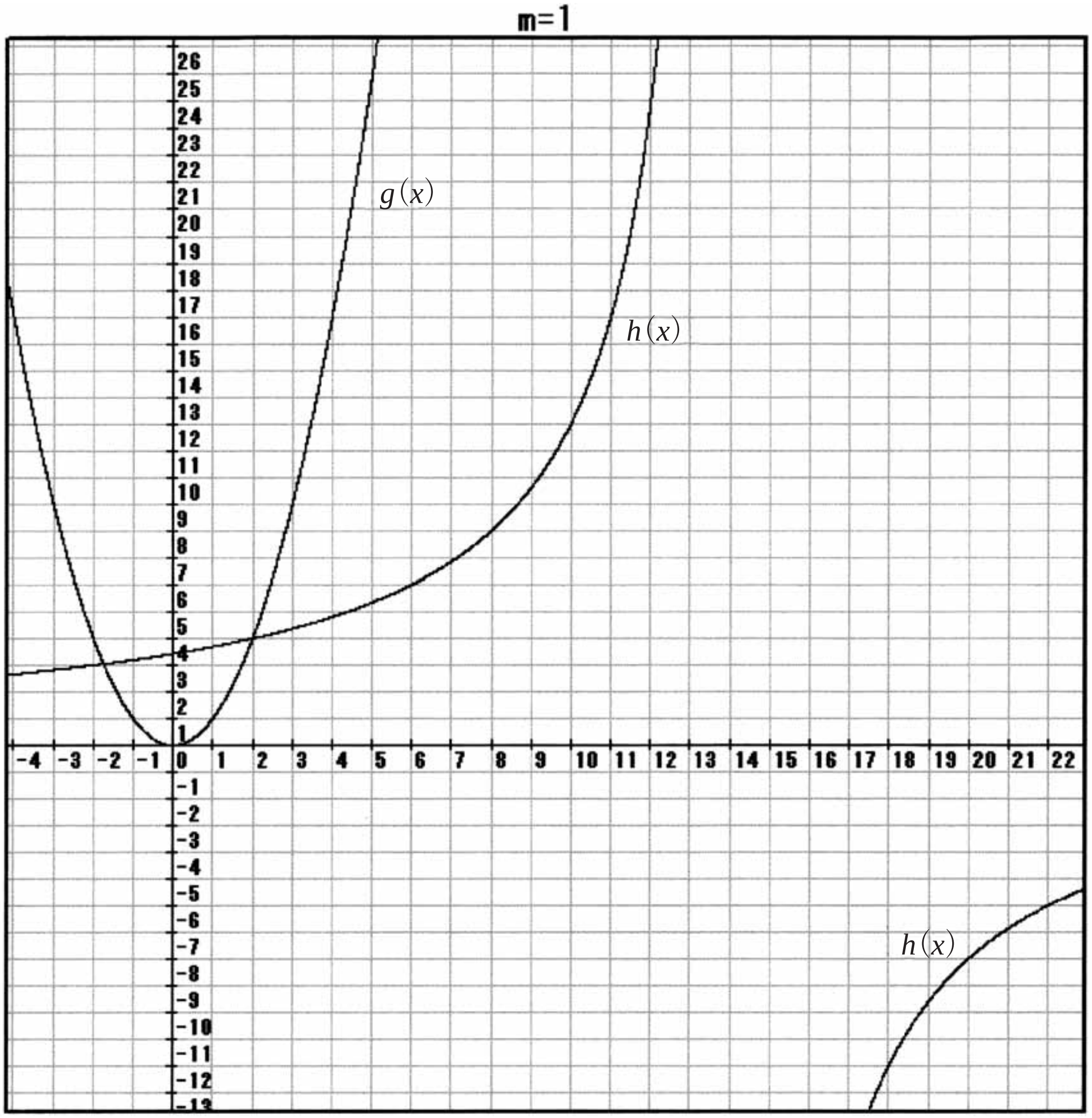

図 5 第 2 法

(iii) $m=2$ の場合は村瀬の第 3 法の（1.5）である．この漸化式の解は，図 6 のように曲線 $g(x)=x^2$ と曲線

$$h(x)=\frac{48-x^3}{14-2x}$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x+\frac{49}{2}+\frac{295}{2x-14} \tag{7.1}$$

との交点である．この場合 $h(x)$ は $x=7$ が漸近線である．また $48^{1/3}<x$ のとき $h(x)<0$ となり，$g(x)=x^2>0$ である．したがって初期値を $48^{1/3}<x_0$ に選ぶと，$g(x)$ と $h(x)$ は同じ y

の値をとらないので，x_0 が不適切となり，#NUM! が表示される．$0<x<2$ のときには，$h(x)$ は $x=1.8$ 付近で増加から減少となるので，初期値が $0<x_0<2$ および $2<x_0<48^{1/3}$ のときには $\{x_n\}$ は振動しながら 2 に収束する．$m=3,\ 4$ のときもこのような収束となる．

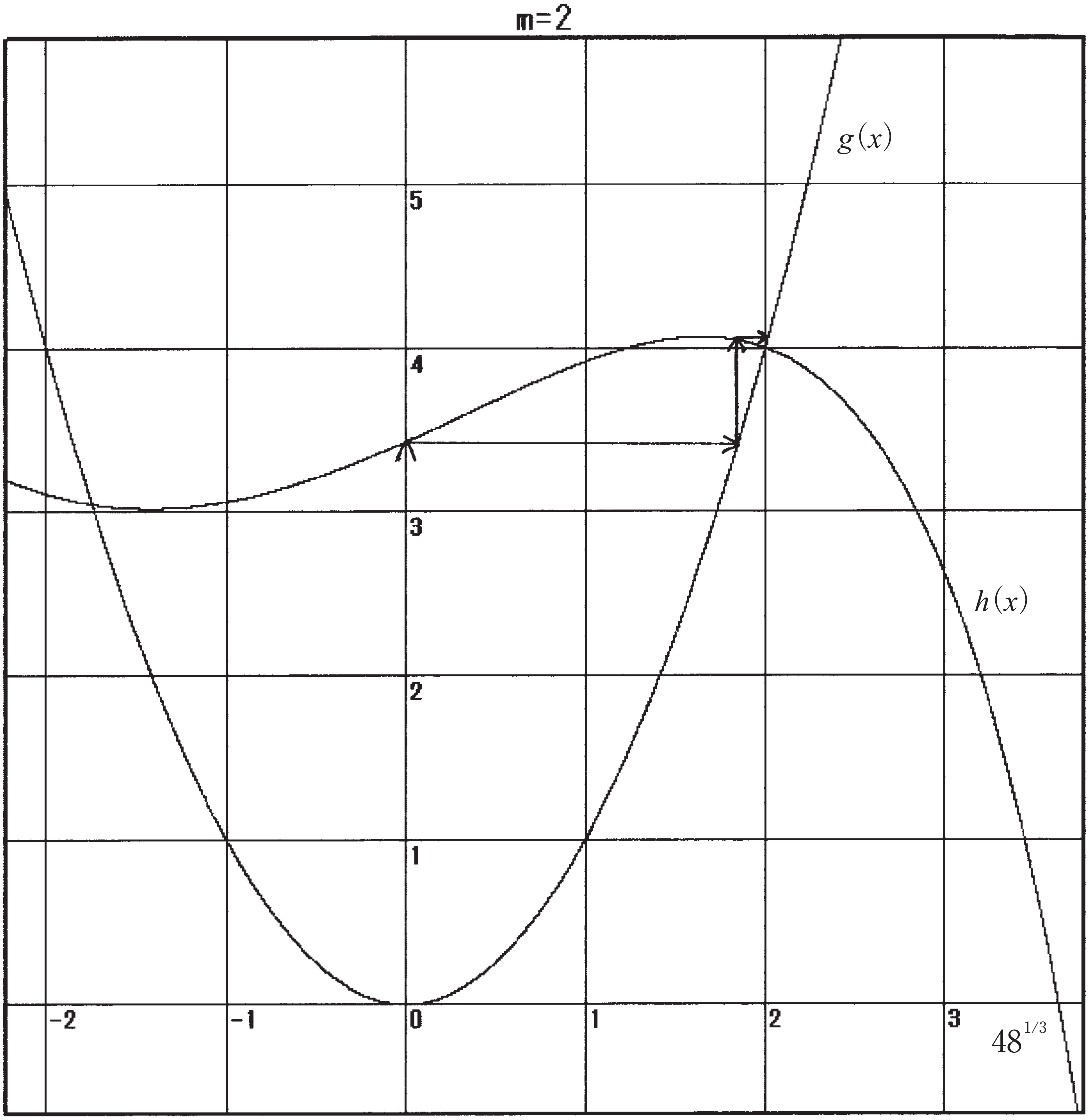

図 6 第 3 法

以上をまとめて

命題 35　村瀬の拡張漸化式（2.3）の m と解 2 に関する初期値と収束の関連は次のようになる.

(i)　$m=-10, -9, \cdots, -1, 0$

$0 \leq x_0 < 2$ のとき，単調増加しながら 2 に収束する.

$2 < x_0 < 6+2\sqrt{15}$ のとき，単調減少しながら 2 に収束する.

(ii)　$m=1$

$0 \leq x_0 < 2$ のとき，単調増加しながら 2 に収束する.

$2 < x_0 < 6+2\sqrt{15}$ のとき，単調減少しながら 2 に収束する.

(iii)　$m=2, 3, 4$

$0 \leq x_0 < \sqrt[3]{48/(m-1)}$ $(x_0 \neq 2)$ のとき，振動しながら 2 に収束する.

命題　36　村瀬の拡張漸化式は，曲線の形により 3 つのグループに分かれるが，各グループに村瀬の漸化式がそれぞれ代表としてうまく存在する.

鈴木武雄[4]は，村瀬の第 1～3 法の発見が自覚的であり，偶然獲得した方法でないと主張している．定理 35 および系 36 はこの主張を裏付けている.

われわれは $m=5$ のとき，$0 \leq x_0 < (48/4)^{1/3}$ $(x_0 \neq 2)$ で村瀬の拡張漸化式が 2 に収束することを確認できない.

命題 37 (i) ニュートン法（5.1）は，初期値 α が $f'(\alpha)=0$ のとき解は求まらない．α 以外の初期値では何れかの解に収束するが（単調増加，単調減少とは限らない），必ずしも初期値に近い解に収束するとはいえない．すなわち初期値を捜すのが困難である.

(ii) 村瀬の 3 次方程式のニュートンの漸化式（6.2）の場合，初期値を $x_0=0$ とすると $f'(0)=0$ になり，表 6 のようにエラーとなる．したがって初期値を $x_0=0.1, 0.2$ とすると表 7, 8 のように 2 以外の解に収束する．$x_0=0.3$ のとき 2 に収束する.

収束の速さ（反復回数）　村瀬（1.3)，(1.4)，(1.5）では，表 2, 3, 4 のように $x_0=0$ から出発した場合，14, 9, 10 回の反復で解 2 を得る．ニュートンの漸化式 (6.2) が収束したときと同じ初期値 $x_0=0.3$ とした場合も，解 2 を得るまでの反復回数は同じ 14, 9, 10 回である.

一方，ニュートン法 (5.1) では初期値をうまく選ぶと，村瀬の漸化式より反復回数が少なくて収束が速い．表 9, 10 のように初期値を $x_0=0.3, 0.4$ にすると，5 回目で解 2 を得る.

命題 38　村瀬・ニュートンの拡張漸化式 (6.4) は (5.71) に於いて $k=0.5$ の場合であり，表 13～表 19 のように収束が遅い.

$k \neq 1$ のときは，おそらく $k=1$ のときより収束が遅いと思われる．以上の数値計算実験より

命題 39　村瀬義益の囲炉裏の問題の３次方程式 (1.2) の解 2 に収束する速さは，反復回数の少ない順に (6.2)，(1.4)，(1.5)，(1.3)，(6.4) となる．

８．村瀬義益の逐次近似法の考え方と歴史的考察

A．村瀬の逐次近似法の考え方

①　村瀬は，第 1，2 法の漸化式により，数値計算を行い解を 2 としている．第 3 法では漸化式により計算していない．第 3 法の式 (1.5) は解 2 が正しいかどうか当てはめの式として使っていると思われる．普通の数学者なら一通りの漸化式を考え，そこから解を見つけ出せば，それで完了である．ところが村瀬は 3 通りも考えて，数値計算とその確かめを行うという念の入れようである．しかも初期値（囲炉裏の太さ）を現実には有り得ない 0 から初めている．これは村瀬が漸化式の意味を理解していて，数学の自覚度が非常に高いことを示している．このように 3 通りの方法を導いたことにより，われわれは村瀬の拡張定理 (2.3)，(2.5)，(5.74) などを多数発見できたのである．

②　村瀬は，他の和算家と異なり，誰でも判るような 3 通りの漸化式（アルゴリズム）を考え，しかも実用的である．定理 35 および系 36 で述べたように，第 1，2，3 法は $m=-10,\ -9,\ \cdots,\ 1,\ 0$，$m=1$，$m=2,\ 3,\ 4$ の 3 つのグループに分けたとき，それぞれ $m=0,\ 1,\ 2$ のときであり，これらのグループの特徴を代表する漸化式である．このことは村瀬は数学の自覚，感性が非常に高いことを示している．

B．歴史的考察

①　長田直樹（東京女子大）[23] は2009年 8 月26日の京都大学数理解析研究所（RIMS）における研究集会で，ブリックス『英国の三角法』，ニュートン『無限個の項を持つ方程式による解析について』，関孝和『解隠題之法』，ラフソン『方程式の普遍的な解析』のNewton法を比較する研究を発表し，次の表 14 を報告した．

命題 40

表 14　Newton法の比較（長田直樹[23]）

<table>
<tr><td></td><td>ブリッグス</td><td>ニュートン</td><td>関　孝和</td><td>ラフソン</td></tr>
<tr><td>発　　見</td><td>1631年以前</td><td>1669年頃</td><td>1685年以前</td><td>1690年頃</td></tr>
<tr><td>適用方程式</td><td>x^3－3x＋A＝0</td><td colspan="2">任意の低次方程式</td><td>任意次数方程式</td></tr>
<tr><td>反復の適用</td><td colspan="2">最初から</td><td>途中から</td><td>最初から</td></tr>
<tr><td>反復多項式</td><td>与えられた多項式</td><td>変化する</td><td colspan="2">与えられた多項式</td></tr>
<tr><td>補正の計算</td><td>差分による展開式</td><td>2項定理を繰り返す</td><td>組み立て除法</td><td>関数値と導関数値</td></tr>
<tr><td>収　束　性</td><td colspan="2">収束しないことがある</td><td>必ず収束する</td><td>収束しないことがある</td></tr>
</table>

この表に合わせて村瀬の漸化式を調べると表 15 になる．

命題 41

表 15

	村瀬義益
発　　見	1673年
適用方程式	x^3－14x^2＋48＝0 のみ
反復の適用	最初から
反復多項式	3種類の多項式
補正の計算	関数値
収　束　性	$6-2\sqrt{15}$，2には収束，$6+2\sqrt{15}$には収束しない

②　江戸幕府の財政を支えたのは佐渡金銀山である．このため鉱山はもとより，これに関連する商業，経済活動や地役人の間で数学の需要が多くなりだした．和算の初期の大家百川治兵衛（1580－1638）は，大坂，京都で活躍した．その後，百川は数学が必要になりだした佐渡に，越中（富山）の国山下かぢか沢（未だ特定できない）を経由して1629年に来島した．百川はその苗字から朝鮮から来た人ではないか，という説がある．もしそうなら，和算の大家百川は佐渡に行くことに拘らなかったという考えも成り立つ．百川は晩年まで数学を全島に広め，1638年に新潟に渡り９月に没した．百川が亡くなった３年後に，門弟たちは百川忠兵衛（キリスト教の疑いで治兵衛から改名した）著として『新編諸算記』（1641）を大坂で出版した．開平法とは平方根を求めるアルゴリズムである．これを求めるためのニュートンの漸化式は次のようになる．

方程式 $f(x)=x^2-A=0$ の正の解は $\sqrt{A}$ である．$f(x)$ にニュートン法を適用する．

$$a_{n+1}=a_n+\frac{A-a_n^2}{2a_n}(n=0,1,2,\cdots) \tag{8.1}$$

$$=\frac{a_n^2+A}{2a_n} \tag{8.2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{A}{a_n}\right) \tag{8.3}$$

このとき $\{a_n\}$ の極限値は $\sqrt{A}$ となる．1641年の『新編諸算記』は，この漸化式を 2 回使って $\sqrt{15625}$ の値 125 を得ている．

③　村瀬義益は佐渡で生まれた．村瀬は『算法勿憚改』の序で，少年の頃から数学を志し，百川流を学んだことを記している．村瀬は『佐渡国略記』にある百川の18名の門弟に入っていないので，直接百川から学んでいないであろう．したがって村瀬は1630年頃から1710年頃の間に生きていた人であろう．その後，村瀬は百川流の数学に満足せず，佐渡から江戸へ出て礒村吉徳（よしのり）[2]を師として学ぶ．1673年に『算法勿憚改』5巻を著す．『算法勿憚改』の意味は，「誤りを改めるに憚（はばか）ること勿（なか）れ」であり，これまでの和算書の誤りを指摘して訂正している．5巻には「目黒の好み」という特記すべき項がある．目黒の不動尊に掲げられた算額に関するこの記事は，現在のところ算額についての最古の記録で，寛文年間（1661－1673）には，すでに神社に算額を奉掲する習慣が広まって

いたことを示す資料として貴重なものである（金子［17, p. 16]）.『算法勿憚改』を著した1673年には，村瀬は江戸から世喜宿（せきやど）（現在の千葉県関宿町）に移り住んでいた．1681年に後刷りとして『算学淵底記（えんていき）』を出版する．内題に『算法勿憚改』とある．『新編諸算記』（1641）はもとより，『塵劫記』（1627，吉田光由)，『竪亥録』（1639，今村知商)，『算元記』（1657，藤岡茂元)，『算法闕疑抄』（1661，礒村吉徳)，『算俎』（1663，松村茂清）などに見られるように，当時は平方根を算盤で求めることが流行していた．村瀬は平方根を求めるための漸化式（1.3）～（1.5）を導いたとも考えられる．

④　算聖といわれる関孝和（1640頃-1708）の師は誰か判らない．しかし関は村瀬の『算法勿憚改』を勉強して，ここに述べられている問題の解答を作った．このようにして関は村瀬の数学を基にして自分の数学を作っていったのである．この意味で村瀬の業績は高く評価される．

９．まとめ

日本の和算家がニュートン法を含むような考え方をしていたことが判明した．村瀬義益は，囲炉裏の太さを３次方程式で解くために，３ つの漸化式の集合（1.3)，(1.4)，(1.5）を考えた．その拡張漸化式の集合（2.3）は（1.3)，（1.4)，（1.5）により特徴のある 3 つのグループに分類される．下平和夫［12, p. 172］は第３法の文章をホーナー法としている．このような考え方は現在でも誰も行っていないであろう．

村瀬義益が『算法勿憚改』を著したのは1673年である．このころヨーロッパでは，イギリスのニュートン（1642(3)-1727）とドイツのライプニッツ（1646-1716）が微分積分法を発見して，その重要性に気付き国を挙げて先見争いをしていた．このような時代に鎖国をしている日本で，村瀬が現在，数値計算で最も用いられているニュートン・ラフソン法の漸化式を含む堀口の漸化式（5.74）の基になる３個の漸化式の集合を独自に考案していた．このことにより，村瀬は日本の誇る独創的な数学者になった．世界の数学者が知ったら驚くことであろう．

10. 教材

本稿の内容はパソコン実習および数学教育の教材として利用できる．以下は学生の格好の練習問題となろう．

２　礒村吉徳（？-1710）は，1659年に『算法闕疑抄（けつぎしょう)』初版全５巻を著す．本書は「和算初期（天元術以前）の集大成と言える書物である．算盤算法の最高峰を詳しく丁寧に解説し，多くの人に読まれた．第４巻で『塵劫記』の遺題（いだい）に解答し，第５巻では遺題を 100 問提出し，これが刺激となり遺題継承に拍車がかかった．1684年に『増補算法闕疑抄』を出し，多くの増補に加え，遺題に礒村自身の解答を付けた.」（小寺［19]，佐藤［16])．『算法闕疑抄』は名著であったが，それまでの和算家たちの業績を整理しわかり易くまとめた著作で，必ずしも数学的に独創的とか画期的な和算書とはいえない（鈴木［4])．礒村と村瀬の師弟関係には特別なものがあり重要で，これに関しては鈴木［4］の興味ある研究がある．このように村瀬は人物的にも興味のある和算家なのである．

練習問題 1　(1.4) の漸化式を表 1 のようにExcelで式を入力して計算しなさい.

練習問題 2　(1.5) の漸化式を表 1 のようにExcelで式を入力して計算しなさい.

練習問題 3　$\sqrt{2}$ をニュートン法の漸化式を使い，パソコンで求めなさい.

練習問題 4　$\sqrt{2}$ を村瀬の拡張漸化式を使い，パソコンで求めなさい.

練習問題 5　$-3^{1/3}$ をニュートン法の漸化式を使い，パソコンで求めなさい.

練習問題 6　$-3^{1/3}$ を村瀬の拡張漸化式を使い，パソコンで求めなさい.

練習問題 7　以下の課題を行いなさい.
(1) 具体的な実数解をもつ 4 次方程式を自分で作りなさい.
(2) (1) の 4 次方程式に対して，以下の ① ～ ⑪ の数値計算をしなさい.
① (2.7) を使いパソコンで数値計算して解を求めなさい.
② (3.3) を使いパソコンで数値計算して解を求めなさい.
③ (3.9) を使いパソコンで数値計算して解を求めなさい.
④ (3.11) を使いパソコンで数値計算して解を求めなさい.
⑤ (3.13) を使いパソコンで数値計算して解を求めなさい.
⑥ (4.6) を使いパソコンで数値計算して解を求めなさい.
⑦ (4.7) を使いパソコンで数値計算して解を求めなさい.
⑧ (5.15) を使いパソコンで数値計算して解を求めなさい.
⑨ (5.28) を使いパソコンで数値計算して解を求めなさい.
⑩ (5.32) を使いパソコンで数値計算して解を求めなさい.
⑪ (5.46) を使いパソコンで数値計算して解を求めなさい.

練習問題 8　練習問題 7の (1) の 4 次方程式に対して，ニュートン法の漸化式 (5.1) を用いてパソコンで数値計算して解を求めなさい.

練習問題 9 (1)　練習問題 7の (1) の 4 次方程式に対して，例 6 の (4.9), (4.11), (4.13) を使いパソコンで数値計算して解を求めなさい
(2) 3 つの数値計算で収束の速さを比較しなさい.

練習問題 10　(5.30) が成り立つことを確認しなさい.

練習問題 11　練習問題 7 の (2) ① ～ ⑪ の数値計算に対して，解の収束する様子を，図 3 の村瀬の第 1 法のようにグラフを描いて観察しなさい.

練習問題 12　練習問題 8 のニュートン法の計算に対して，解の収束する様子を，図 3 の村瀬の第 1 法のようにグラフを描いて観察しなさい.

練習問題 13　Excelのグラフ機能を使い，表 2 第 1 法～表 4 第 3 法の解に近づく様子を，折れ線の相対誤差曲線（知らない場合は自分で調べなさい）で表しなさい.

練習問題 14　Excelのグラフ機能を使い，練習問題 7 の ⑵ の数値計算 ① ～ ⑪ に対して，解に近づく様子を折れ線の相対誤差曲線で表しなさい.

１１．研究課題

研究課題 1　⑴　本稿で与えた村瀬の拡張漸化式とは別の拡張漸化式を考案せよ.

⑵　発見した漸化式の性質を研究せよ.

難しい（?）研究課題 2　練習問題 7 の ⑵ の数値計算 ① ～ ⑪ の収束の速さを比較せよ．また何故，漸化式の違いにより収束の速さが異なるのか原因を考察せよ.

高級な研究課題 3　漸化式 (2.3) は x の項が存在しない特殊な 3 次方程式 (1.2) から得られる．それでは x の項が存在する一般の 3 次方程定式

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \tag{2.10}$$

に対して，(2.5) の $p=3$ のときとは別の一般の漸化式を§5 の F の手順を使い，分母に a_1, a_2, 分子に a_2, a_3 があるように求めよ.

難しい（?）研究課題 4　系 36 の次に述べたように，村瀬の拡張漸化式 (2.3) で $m=5$ のとき，$0 \leq x_0 < (48/4)^{1/3}$（$x_0 \neq 2$）で 2 に収束することを確認できない．この原因を究明せよ.

研究課題 5　本稿のいたる所で与えた漸化式 x_{n+1} に対して

$$x_{n+1}-x_n \tag{10.1}$$

を求め，これらの漸化式の収束の速さを評価せよ.

応用研究課題 6　世の中には，村瀬が「囲炉裏の太さと体積」に関する 3 次方程式から，3 つのタイプの漸化式を導いたような現象が多く存在するであろう.

①　実例から 2 次方程式を導き，タイプ別の漸化式を作れ．次にこれらの漸化式から，拡張漸化式を作れ.

②　実例から 3 次方程式を導き，タイプ別の漸化式を作れ．次にこれらの漸化式から，拡張漸化

式を作れ.

③　実例から4次方程式を導き，タイプ別の漸化式を作れ．次にこれらの漸化式から，拡張漸化式を作れ.

研究課題 7　ニュートンの漸化式 (5.1) とニュートンの拡張漸化式 (5.32) について，具体例により数値計算を行い，両者の収束の速さと精度を比較せよ.

研究課題 8　ニュートンの漸化式 (5.1) と村瀬の拡張漸化式 (5.46) について，具体例により数値計算を行い，両者の収束の速さと精度を比較せよ.

応用研究課題 9　漸化式 (5.31) はどのような応用があるか研究せよ．また幾何学的な意味があるのか考察せよ.

研究課題 10　村瀬の拡張漸化式 (5.46) ～ (5.48) の収束性を考察せよ.

発展研究課題 11　本稿の内容から数値計算の論文を書け.

謝　辞

藤井康生先生は村瀬の第 3 法を解読し，お教え頂いた．Excelの数値計算では永坂秀子先生に教示頂いた．土倉保先生は村瀬の拡張漸化式とニュートン法の関連を示唆された．日本オイラー研究所鈴木武雄先生は本研究に興味を示し，推進するよう助言された．これらの先生方にここに深く感謝します.

参考文献

[1]　村瀬義益著・西田知己校注：『算法勿憚改』，研成社，1993
[2]　中村正弘・武田二郎：『同文算指』と『算法勿憚改』の間，大阪教育大学 数学教育研究第32号，2002
[3]　平山　諦：『和算の誕生』，恒星社厚生閣，1993年5月
[4]　鈴木武雄：『和算の成立』，恒星社厚生閣，2004年7月
[5]　________：『和算の成立上』，1997年10月
[6]　________：村瀬義益と逐次近似法，大阪教育大学数学教育研究第26号，1997.
[7]　永坂秀子：Excelで数値計算はできるか？，教育・研究資料
ここには3角関数の計算から，Newton法，4次のRunge－Kutta法，逆行列計算，連立1次方程式のガウス・ジョルダン法が説明されている.
[8]　________：『計算機と数値解析』，朝倉書店，1980年3月
[9]　日本学士院編：『明治前日本数学史』第一巻 新訂版，井上書店，臨川書店，1979年10月
[10]　日本学士院編：『明治前日本数学史』第五巻 新訂版，井上書店，臨川書店，1979年10月
[11]　三上義夫：村瀬義益と算法勿憚改，千葉県図書館協会，1932，9号－13号.

[12]　下平和夫：『和算の歴史 上』，富士短期大学出版部，1970
[13]　下平和夫監修，鈴木久男校注，百川忠兵衛著：『新編諸算記』（江戸初期和 算選書第４巻１，研成社，1994年10月
[14]　林　鶴一：『和算研究集録下巻』，鳳文書館，昭和12年5月
[15]　佐藤健一：『新・和算入門』，研成社，平成12年8月
[16]　佐藤健一他編著：『和算史年表』，東洋書店，平成14年6月
[17]　金子 勉編：『百川治兵衛和算書稿本』（金井町文化財調査報告第９集），金井町教育委員会/生涯学習課，平成4年3月
[18]　米澤　誠：連載 和算資料の電子化 (9)：シビルエンジニアとしての和算家，東北大学附属図書館報木這子，http://www2.library.tohoku.ac.jp/wasan/，Vol.30，No.2，2005，（通巻111号），2005年9月30日
[19]　小寺　裕：和算の館，http://www.wasan.jp/
[20]　日本数学会編集：『岩波数学辞典』第３版，岩波書店，1985
[21]　藤原松三郎：『東洋数学史への招待－藤原松三郎数学史論文集－』，藤原松三郎先生数学史論文刊行会編，東北大学出版会，2007
[22]　伊理正夫：『数値計算』－方程式の解法－，朝倉書店，1981年12月
[23]　長田直樹：英国と日本におけるNewton法，「数学史の研究」，京都大学数理解析研究所（RIMS）研究集会，2009年8月26日
[24]　堀口俊二：和算家村瀬義益の３次方程式の逐次近似法のコンピュータによる数値計算，2009年度日本数学史学会年会（同志社大学），5月31日，講演アブストラクト pp. 9-13.
[25]　________：村瀬義益の３次方程式の逐次近似法の拡張定理と数値計算，2009年度日本数学会秋季総合分科会（大阪大学），9月26日，数学基礎論および歴史分科会講演アブストラクト，pp. 12－13.
[26]　________：村瀬義益の３次方程式の逐次近似法の拡張定理とニュートン法の拡張定理の関連について，日本数学史学会（同志社大学），2009年11月15日，第16回数学史研究発表会アブストラクト，pp. 86－99.
[27]　山崎与右衛門・竹内乙彦・鈴木久男：『日本のそろばん』，暁出版，1976年9月