

離散的数量調整過程の代数構造

八 木 直 人

2016年2月

新潟産業大学経済学部紀要 第46号別刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.46 February 2016

離散的数量調整過程の代数構造*

八木 直人

On the Algebraic Structure of Discrete Quantity Adjustment Processes

Naoto YAGI

要旨

本論文では、 (S, s) 在庫政策を伴う一般的な投入産出構造と時間構造を持つマクロ経済モデルを提示し、経済変動における離散的数量調整過程の特性を分析する。とくに個々の企業の生産および派生需要の伝播によるマクロ的在庫調整過程をそれぞれ演算として定義し、在庫調整過程の安定性に関する条件を示す。また演算の集合としての群を定義し、外生需要によって引き起こされる在庫調整過程を代数的に分析するアプローチを示すとともに、在庫調整過程とマクロ動学における安定集合の代数構造を分析する。最後に、マクロ経済の在庫水準の長期的な定常状態について分析する。

キーワード 自己組織臨界性、在庫調整、 (S, s) 政策、内生的景気循環

1 はじめに

Arrow, Harris and Marschak(1951) および Scarf(1960) にはじまる (S, s) 在庫政策に関する一連のミクロ経済学的研究は、企業が生産調整に非凸型の費用関数を持つときに、在庫調整を非連続的で lumpy に行うことが最適であることを示した。それ以降、多くの研究者が (S, s) 調整ルールを集計化したときのマクロ経済的特性に関心を寄せてきた。 (S, s) 調整ルールのマクロ集計的特性に関する初期の代表的な研究は Caplin(1985) である。Caplin は、それぞれが異なった片側 (S, s) ルールに従って在庫調整を行う、 n 個の非同質な企業からなるマクロ経済を「 (S, s) 経済」と呼び、確率的に外生需要が生じるときの経済変動の統計的性質について分析している。しかし Caplin のモデルでは、企業間の投入産出関係は存在せず、外生需要に対して個々の企業が行う生産だけに焦点を当てていた。

Bak, Chen, Scheinkman and Woodford (1993) は、Caplin とは異なる観点から、企業間に中間投入による投入産出構造があるときに、 (S, s) ルールに基づく在庫調整過程が大きな派生需要の連鎖を生み、1 単位の外生需要に対して生産量および中間投入が大きく変動することを示した。Bak et. al. のモデルは、Bak によって物理学における sandpile model の研究から発展した自己組織化臨界性 (self-organized criticality; SOC) の研究成果に基づいている。Sandpile model は、粉粒の崩れように一定の離散的な粘性があり (S, s) 調整ルールに似た閾値を持つ局所的離散調整ルールが、要素間の相互作用を通じて大域的な安定性に影響を与えるモデルであり、企業間の相互作用のある集計的 (S, s) 在庫政策モデルと極めて似た構造を持つ離散力学系モデルである。Nirei(2000) は、Bak et. al. モデルと類似したモデルを構築し、モデルの確率的性質と在庫保有

*本論文に対して浅田統一郎教授（中央大学）から貴重なコメントを頂いた。記して感謝の意を表したい。

の定常分布を導出している。しかしながらこれらの研究では、2次元格子に並んだ企業が近傍の企業とのみ投入産出関係にあるような、比較的単純な投入産出構造を前提としていた。

本論文では、Bak et. al. のモデルを踏まえ、Caplin のモデルに企業間の中間投入の相互作用を導入することで、一般的な $N \times N$ の行列による投入産出構造を持つ (S, s) 経済のモデルを構築する。また、sandpile model の近年の研究成果を踏まえて、(S, s) 経済モデルを代数的観点から分析するアプローチを提示する^{注1)}。

2 (S, s) 経済モデル

2.1 Caplin による (S, s) 経済

モデルの分析に入る前に、本論文で考察の対象とする (S, s) 経済の複雑性について概観しよう。

Scarf(1960) は、一回生産するごとにそれぞれ固定的な費用がかかる場合、Value Function の K -凸性という概念を用いて、片側 (S, s) ルールが企業にとって最適な在庫調整ルールであることを証明した。いま小売業のある期の在庫保有量を x とする。企業は確率的な外生需要 y に直面しており、各期の最後に在庫保有を回復するために生産を行うとする。すなわち、生産ロットを $\Delta = S - s$ とすると、在庫の推移方程式は

$$\begin{aligned} x' &= x - y + m\Delta, \\ m &= \begin{cases} 0 & \text{if } x - y \in (s, S] \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

となる。企業は生産するごとに固定費用がかさむのを避けるために、在庫ストックが $(s, S]$ の間にあるときには生産を行わず、在庫が下限 s を下回ったときだけまとめて Δ だけの生産を行い、一気に在庫の水準を回復する。

Caplin(1985) は、それぞれ個別に (S, s) 調整ルールをとる主体が単純に n 個集まった経済を (S, s) 経済と定義し、再帰的集合上における確率分布などの確率論的振る舞いを分析している^{注2)}。

定義 2.1 (Caplin(1985)). 次の (1)~(4) 要素からなる経済を (S, s) 経済とよぶ。

- (1) 企業の集合: $N = (1, \dots, n)$.
- (2) 外生的な需要プロセス:

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \in \mathbb{Z}_0^+.$$
- (3) (S, s) 的調整ルール:

$$\forall i \in N, (S_i, s_i) \text{ with } \Delta_i = S_i - s_i > 1.$$
- (4) 各企業の在庫水準の遷移式:

$$x'_i(t) = x_i(t) - y_i(t) + m_i(t)\Delta_i.$$

Caplin による (S, s) 経済は、(S, s) 調整ルールをマクロ集計化したときの特性の分析として先駆的なものであったが、生産における中間投入やそれによる他企業への派生需要などが存在しないため、在庫調整過程における主体間の相互作用がなく、各主体が単独で (S, s) 調整を行う主体の集合となっており、それから得られるマクロ経済的結論も比較的単純なものであった。

2.2 (S, s) 経済の複雑な特性

企業間に中間投入による投入産出構造がある現実的な (S, s) 経済では、(S, s) 調整過程の特性が投入産出構造を通じて伝播していく性質がある。このことが (S, s) 経済のマクロ経済変動に大きな影響を与える。この点を確認するために図1に示される例を見てみよう。いま $(S, s) = (2, 0)$ の (S, s) 在庫調整ルールに従っている同質な企業が多数存在するとする。各企業は自分の在庫がストックアウトしたときにのみ2単位の生産を行う。このとき右隣の企業の財を中間投入として1単位必要とする。それぞれの企業は (S, s) ルールに従って生産と在庫調整を行いながら、中間投入のつながりによって局所的に相互作用することになる。

図1(a)のケースでは、1単位の外生需要が生じたとしても、その需要は在庫ストックによって吸収されてしまい、企業の在庫はストックアウトしない。したがってこの場合は生産はゼロである。しかし図1(b)のケースを見てみよう。図1(b)のケースが図1(a)のケースと異なるのは、マクロレベルでの在庫ストックが1単位少ないという点だけで、その他

^{注1)} 本論文の理論的な分析の多くは、Dhar(1990)をはじめとする Sandpile Model の数理的研究の成果に基づいている。Sandpile Model は Bak et al.(1987) によって理論物理の分野で研究が始められたが、その後モデルの持つ離散的数量調整メカニズムに関する数理構造に関心が移り、代数構造や統計的性質に関する数理的分析が進んだ。

^{注2)} Caplin(1985) では、より単純な確率的な需要プロセスが用いられている。

はまったく同一である。すなわち、マクロ的に見ればほぼ同一な経済状態である。にもかかわらずこのケースのマクロ経済的挙動は図 1 (a) のケースとは大きく異なった結果となる。外生需要を受けた企業は在庫のストックアウトを起こし生産を行う。その

際に右隣の企業に中間投入財の派生需要を生じる。今度は派生需要を受けた企業が在庫のストックアウトを起こし生産を行い、また右隣の企業に派生需要を生じる。こうして派生需要の連鎖としての大域的な調整過程が生じることになる。

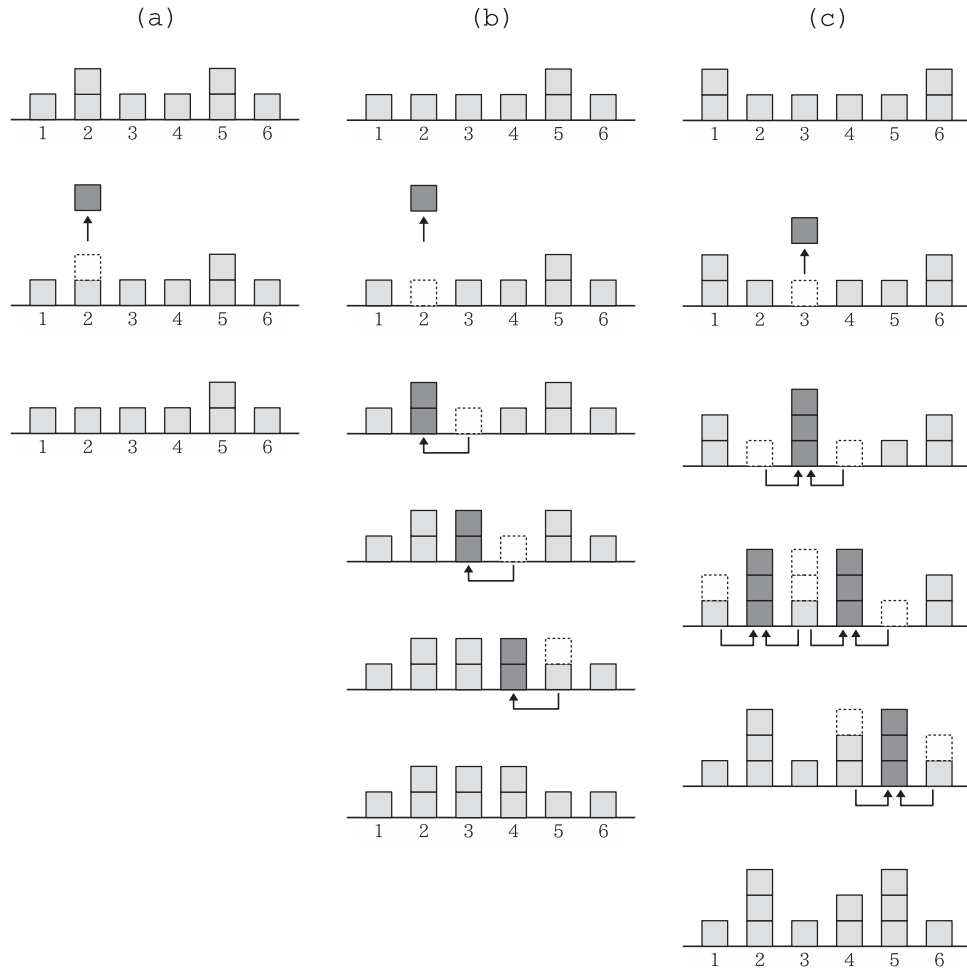


図 1: 投入産出関係を伴う場合の (S, s) 在庫政策と在庫水準の推移

この在庫調整過程の複雑さについて、もう一つ別の例を見てみよう。図 1 (c) は、企業が $(S, s) = (3, 0)$ の (S, s) 在庫政策ルールに従っており、右隣だけでなく左隣からも 1 単位の間接投入を必要とするケースである。外生需要によって企業 3 は在庫がゼロになるので、在庫の上限まで在庫水準を回復すべく 3 単位の生産を行う。このとき中間投入として企業 2 と企業 4 へ 1 単位ずつの派生需要が生じる。この派生需要によって今度は企業 2 と企業 4 の在庫がゼロになり、企業 2 と企業 4 が 3 単位の生産を行う。このさい企業 2 と企業 4 は、それぞれ両

隣の企業から 1 単位ずつの中間投入を得、その企業への 1 単位ずつの派生需要が生じる。このようにして、派生需要の連鎖が生じ、すべての企業が在庫の水準を回復した時点でこの連鎖は終了する。この一連の派生需要の連鎖が、 (S, s) 経済における在庫調整過程を構成する。

この在庫調整過程の中では同時に複数の企業が生産を行っている。ここでの派生需要による企業のつながりは局所的なつながりであるから、複数の異なった方向へ派生需要が生じ、その連鎖が続いていくこともありうる。このようにミクロレベルにおけ

る非凸性のもとで企業が (S, s) 型の在庫政策をとると、個々の企業の調整過程に離散性、一塊性が生じ、その影響を投入産出構造の中で伝播させながら、マクロレベルの数量調整過程が非常に複雑で多様なものになるのである。

図 1 (a) のケースと図 1 (b) のケースとは、ミクロの在庫保有状態がたった一ヶ所異なっているだけで、マクロ的な状態で見ればほとんど同一である。にもかかわらず生じる結果はこのように大きく異なる。マクロ状態の初期値におけるわずかな差異が非常に大きな結果の相違を生み出すことになる。すなわちつまり非凸性という非線型性によって「初期値に対する鋭敏な依存性」という複雑系の特性を持つことになる。

(S, s) 経済は状態変数を閾値の上限と下限で「折りたたむ」効果が内蔵されている。と同時に、図 1 のような局所的な調整の過程の連鎖を通じて主体間の相互作用が生じ、「折りたたみ」の効果を遙か遠方まで伝播させる。「折りたたみ」と「増幅」はカオスの振る舞いの基本原理であり、(S, s) 経済はそれを内蔵している。その結果、(S, s) 経済における大域的な調整過程が「初期値に対する鋭敏な依存性」という複雑系としての特性を示すことになる。むしろ (S, s) 経済にける調整過程の本質は、局所的な調整過程の累積が大域的な調整過程を構成するその間でこのようなカオスの振る舞いの要素をはらんでいる点にあるといってもいいだろう。

以下の節では、Caplin(1985) のモデルに局所的な (S, s) 的調整過程の相互作用を明示的に組み込んだ一般化された (S, s) 経済モデルを定義し、局所的な調整過程の累積が大域的な調整過程を構成する中で生じるこの性質を、解析的に分析する。

3 モデル

3.1 企業間の投入産出構造

本論文で扱うモデルは以下のようなものである。企業の集合を $N = \{1, \dots, n\}$ とし、各企業のイン

デックスを $i \in N$ とする。各企業 i の在庫ストックの水準を状態変数 x_i とし、在庫ストックの配列を在庫配列ベクトル $x = (x_1, \dots, x_n)$ とする。状態変数ベクトルの空間 \mathcal{X} は

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid x_i \geq 0, \forall i \in N\} \quad (2)$$

である。各企業 $i \in N$ は固有の値 (S_i, s_i) で特徴付けられる (S, s) 調整ルールに従っているとする^{注 3)}。この (S, s) 調整ルールのもとでの安定な在庫配列ベクトルの空間 \mathcal{S} は

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{X} \mid S_i \geq x_i > s_i, \forall i \in N\} \quad (3)$$

と定義される。

各企業が生産を行う際のロットサイズを $\Delta_{ii} = S_i - s_i$ とし、各企業は在庫ストックの水準 x_i が下限 s_i を下回ったときに、まとめて生産を行い在庫水準 x_i を Δ_{ii} だけ回復する。このとき中間投入に関する派生需要として他の企業 j の在庫ストック x_j を Δ_{ij} だけ減少させるとする^{注 4)}。よって企業 i が 1 回生産を行うときのすべての企業の在庫の変動は、ネット・プット・ベクトル $\Delta_i = (\Delta_{i1}, \dots, \Delta_{ii}, \dots, \Delta_{in})$ によって表すことができる。ここで価格は固定であるとし、簡単のために全ての財の価格を 1 に基準化すると、企業 i の利潤 π_i は

$$\begin{aligned} \pi_i &= \langle (\Delta_{i1}, \dots, \Delta_{ii}, \dots, \Delta_{in}), \mathbf{1} \rangle \\ &= \Delta_{ii} + \sum_{j \neq i} \Delta_{ij} \end{aligned} \quad (4)$$

で表される^{注 5)}。

企業間の投入産出構造は各企業のネット・プット・ベクトルの総体であるから、企業間の相互作用を持つ (S, s) 経済モデルの投入産出行列は、次のような行列 Δ によって表すことができる^{注 6)}。

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

^{注 3)} 特定の企業に派生需要が集中し、在庫のストックアウトによって派生需要に応じられないようなケースを排除するために、在庫の下限 s_i は十分大きい値であると仮定しておく。

^{注 4)} この Δ_{ij} の項によって、各企業に固有の (S_i, s_i) 調整ルールが局所的な安定化の作用を通じて (S, s) 的な折りたたみの効果を他の主体へと伝播していく仕組みを明示的に示している。

^{注 5)} 財 i の価格を p_i と一般化しても、全ての財の価格が正である限り、 $p_i \Delta_{ij} = \bar{\Delta}_{ij}$ と変換すれば本論の議論は変わらない。

^{注 6)} (S, s) 在庫政策のマクロ経済分析の先駆である Caplin(1985) の (S, s) 経済の定義は、中間投入のない粗生産額モデルであり $\Delta_{ij} = 0$ のケースに相当する。

ここで、分析を経済的に意味のあるモデルに限定するためには、投入産出行列 Δ に関して以下の条件を課すことが妥当である。

条件 3.1. Δ は、次の条件 1~4 をみたす。

1. すべての企業 i の生産ロットサイズは必ず正である ($\forall i \in N, \Delta_{ii} = S_i - s_i > 0$)。
2. 中間財需要による在庫ストックの変化は非正である ($\forall i, j \in N, \Delta_{ij} \leq 0$)。
3. すべての企業 i の利潤は非負である。

$$\forall i \in N, \pi_i = \sum_{j \in N} \Delta_{ij} \geq 0$$

4. 経済全体の総付加価値生産は必ず正である。

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \Delta_{ij} > 0$$

3.2 局所的安定化と大域的安定化の作用素

在庫配列ベクトル x が安定な在庫空間 \mathcal{S} の外にあるとき、少なくとも一つの企業は在庫水準が下限 s を下回った状態にある。このときこの企業は、固有の (S, s) 調整ルールにしたがって生産を行い、在庫水準を回復する。この企業による在庫調整は次のような演算と定義することができる。

定義 3.1. 在庫配列ベクトルを別の在庫配列ベクトルに写す演算 $\phi_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ を

$$\phi_i(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in \mathcal{S} \\ x + \Delta_i & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

と表し、これを生産オペレータと呼ぶ。

生産オペレータ ϕ_i は企業 i の (S, s) 調整ルールに基づく局所的な安定化作用素である。

在庫配列ベクトル x が安定な空間 \mathcal{S} の外にあり下限 s_i を下回る企業がある限り、生産オペレータは繰り返し作用し、在庫配列ベクトルが $x \in \mathcal{S}$ となるまで続く。在庫配列ベクトルが安定化するまでに各企業の生産オペレータが作用した回数を m_i とすると、在庫水準が安定化するまでの作用の全体を、各企業の生産オペレータの積を用いて、次のように定義することができる。

定義 3.2. 在庫配列ベクトルを安定な在庫配列ベクトルに写す演算 $\Phi_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ を

$$\Phi(x) = \prod_{i \in N} \phi_i^{m_i}(x), \quad (m_i \in \mathbb{Z}_0^+) \quad (7)$$

と表し、これを安定化オペレータと呼ぶ。

安定化オペレータ Φ は在庫配列ベクトル全体を安定な空間 \mathcal{S} に写すものであるから、大域的な安定化作用素といえることができる。

3.3 外生需要オペレータ

次に、外生需要に対して (S, s) 経済がどのように作用するかを定義しよう。まず $x \in \mathcal{S}$ において企業 i に生じる 1 単位の外生需要を、次のような演算 $\Upsilon_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}$ として定義する。

$$\Upsilon_i(x) = x - \delta_i = (x_1, \dots, x_i - 1, \dots, x_n) \quad (8)$$

この外生需要による攪乱に対して、上の安定化オペレータ Φ によって在庫空間が安定化される過程を、外生需要オペレータとして次のように定義する。

定義 3.3. 安定な空間 \mathcal{S} から安定な空間 \mathcal{S} に写す写像 $a_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ を

$$a_i(x) = \Phi \cdot \Upsilon_i(x) \quad (9)$$

と表し、これを外生需要オペレータと呼ぶ。

外生需要オペレータ a_i は、在庫配列ベクトル $x \in \mathcal{S}$ において、企業 i に 1 単位の外生的攪乱が生じることによって在庫配列 x が不安定化し、大域的な安定化オペレータ Φ によって再び安定な在庫空間 \mathcal{S} に収束するまでを、一つの演算として表すものである。

3.4 定義および問題設定

以上の議論から、Caplin(1985) による定義を拡張し、投入産出関係を含む形に一般化された (S, s) 経済モデルを以下のように定義する。

定義 3.4. 次の (1)~(4) の要素からなる経済を、一般化された (S, s) 経済とよぶ。

- (1) 企業の集合: $N = (1, \dots, n)$
- (2) 外生的な需要プロセス:
 $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \in \mathbb{Z}_0^+$
- (3) 行列 Δ で表される (S, s) 的調整ルール
- (4) 在庫配列ベクトルの遷移式: $x' = a_i(x_i)$

以上のように一般化された (S, s) 経済モデルにおいて、考察されるべき問題は大きく二つに分けられる。一つは、1 回の外生需要に対して生じる (S, s) 経済の在庫調整過程が安定であるかという問題である。もう一つは、通時的に外生需要が生じたときに、経済の安定状態がどのような性質を持つかという問題である。これらはそれぞれ、安定化オペレータ Φ に関する問題と外生需要オペレータ a_i の集合に関する問題に対応する。

(S, s) 経済における在庫調整過程の安定性の問題は、安定化オペレータ Φ に関する問題として次の三つの問題に分けられる。

- (P1) 安定化オペレータ Φ は有限時間内に収束するか。
- (P2) Φ は一意の在庫配列ベクトル $x \in S$ に収束するか。
- (P3) Φ を構成する $m = (m_1, \dots, m_n)$ は一意か。

(P1) は、 (S, s) 経済モデルにおける基礎的な安定性の問題である。もしある企業 i の (S, s) 的在庫調整が他の企業の (S, s) 的調整を引き起こし、その連鎖が有限時間のうちに収束しないのであれば、 (S, s) 経済は永遠に安定な在庫空間 S に収束しないことになり、基本的な安定性を持たないことになる。企業間の投入産出構造によって生じる調整の連鎖は非常に複雑であるため、この安定性は必ずしも自明なものではない。(P2) および (P3) はオペレータ Φ の表現の一意性もしくは演算が矛盾なく定義されている (well-defined) かどうかの問題である。 Φ が有限時間内に収束するとしてもその収束先が一意でないのであれば、演算 Φ が well-defined に定義されているとはいえない。また仮に収束先が一意であるとしてもその収束経路が複数あり、 Φ を構成する m が経路によって違う値を取るのであれば、 Φ は well-defined であるとはいえない。したがってこれらの問題が肯定的に解決されない場合は、 (S, s) 経済モデルの分析は非常に複雑になり茫漠とした結論しか得られないかもしれない。

一方、外生需要オペレータ a_i の集合に関する問題は、次の二つの問題に分かれる。

- (P4) 外生需要オペレータ a_i の集合にはどのような代数構造があるか。
- (P5) 外生需要オペレータ a_i の集合と、 a_i が働く在庫配列ベクトルの集合の間にどのような関係があるか。

(P4) と (P5) は、 (S, s) 経済の長期的な定常状態を分析、検討するための土台となる性質である。

4 在庫調整過程の安定性

本節では、外生需要によって企業の在庫水準が下限を下回り、在庫配列ベクトルが安定な在庫空間の外にあるときに、安定化オペレータ Φ によって在庫配列が再び安定な在庫空間の中に写されるまでの、在庫調整過程に関する問題を分析する。

4.1 安定化オペレータ Φ の有限収束性

はじめに収束性に関する問題 (P1) から検討する。もし安定化オペレータ Φ の作用の過程で少なくとも一度以上生産を行う企業の集合 \hat{N} が全企業の真部分集合 $\hat{N} \subset N$ であり、かつ $\forall i \in \hat{N}, \sum_j \Delta_{ij} = 0$ であったとすると、総在庫水準はまったく回復しないことになり、在庫水準が下限を下回った初期の状態に戻ってきてループに陥ってしまう可能性がある。したがって条件 3.1 だけでは収束性の必要条件とならない。

収束性に関しては次のような命題が得られる。

命題 4.1. 行列 Δ が条件 3.1 をみたすとき、安定化オペレータ Φ が S 上のある点 x に有限時間内に収束するための十分条件は、行列 Δ が分解不能行列であることである^{注 7)}。

証明. 背理法を用いる。はじめに演算 Φ が有限時間内に収束しないと仮定する。このとき、少なくとも 2 つ以上の企業 $i \in \hat{N}$ が安定化の過程の中で無限回の生産を行うことになる。しかし行列 Δ が分解不能行列であれば、行列 Δ が随伴するグラフ上の任意の企業 $i \in \hat{N}$ から企業 $k \in N/\{\hat{N}\}$ の間に経路が存在する。したがって安定化オペレータ Φ に

^{注 7)} 投入産出行列 Δ を企業間のネットワークの隣接行列としてみると、 Δ 表されるグラフにおいて経路 pass が存在するとは、 $\Delta_{ij} \neq 0$ である主体 i と主体 j をつなげていくことで、二つの主体をつなぐことができることをいう。すべての主体 $i, j \in N$ について経路 pass が存在するとき、グラフ G を強連結 strongly connected という。グラフが強連結のとき、隣接行列 Δ を分解不能という。

よって有限時間 $T < \infty$ までには必ず企業 k の在庫水準 x_k を減少させる。仮定よりこの有限時間 T は無限回くり返されるから、企業 k の在庫水準 x_k は無限に減少しつづける。これはすべての企業 i の在庫水準に下限 s_i が存在することと矛盾。□

また、これより次の系がしたがう^{注 8)}。

系 4.1. 行列 Δ が条件 3.1 をみたすとき、安定化オペレータ Φ が \mathcal{S} 上のある点 x に有限時間内に収束するための十分条件は、全ての企業 i の利潤が正 ($\sum_j \Delta_{ij} > 0$) であることである。

4.2 安定化オペレータ Φ の一意性

次に問題 (P2) および問題 (P3) について検討する。ここで問題 (P3) が肯定的に解決されることは、問題 (P2) の肯定的解決の十分条件になっているので、問題 (P3) のみを検討すればよい。

個々の生産オペレータ ϕ_i 自体は線形変換に過ぎないから、安定化オペレータにおける各企業の生産回数 $m = (m_1, \dots, m_n)$ が与えられれば、安定化オペレータ Φ は、有限個の生産オペレータ ϕ_i の積の結果として、次のように「表現」することができる。

$$\Phi(x) = \prod_{i \in N} \phi_i^{m_i}(x) = x + m\Delta \quad (10)$$

この表現を用いて、次の命題が得られる。

命題 4.2. 任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して、演算 $\Phi_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ における $m = (m_1, \dots, m_n)$ は一意である。

証明. 安定化オペレータ Φ がある在庫配列に収束し、その間に生産を行う企業の流れがそれぞれ異なった $\{i_1, \dots, i_k\}$, $\{j_1, \dots, j_h\}$ で表されたとする。これに対して安定化オペレータの演算を、それぞれ

$$\Phi(x) = \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_k}(x) = \prod_{i \in N} \phi_i^{m_i}(x) = x + m\Delta$$

$$\Phi(x) = \phi_{j_1} \cdots \phi_{j_h}(x) = \prod_{i \in N} \phi_i^{m'_i}(x) = x + m'\Delta$$

と表現したとすると、 $m = m'$ となることを証明すればよい。

(十分性) $\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_k}(x) \in \mathcal{S}$ であり、かつ $\forall j \in N, m_j \leq m'_j$, $\exists j \in N, m_j < m'_j$ であるとする。

このとき、生産オペレータの可換性から、次のように整理することができる。

$$\phi_{j_1} \cdots \phi_{j_h}(x) = \prod_{i \in N} \phi_i^{m'_i - m_i} \left(\prod_{i \in N} \phi_i^{m_i}(x) \right) \in \mathcal{S}$$

ϕ の定義から、これは $\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_k}(x) = x + m\Delta$ と同一の安定な在庫配列に収束する。

(必要性) $\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_k}(x) \in \mathcal{S}$ であり、かつ $\phi_{j_1} \cdots \phi_{j_h}(x) \notin \mathcal{S}$ のとき、 $\forall i \in N, m'_i \leq m_j$ であるとする。不安定な在庫配列ベクトルには少なくとも一つは在庫の下限を下回る企業 j が存在するから、企業 j の在庫配列に関して次の不等号が成り立つ。

$$\begin{aligned} x_j + m'_j \Delta_{jj} + \sum_{i \neq j} m'_i \Delta_{ij} \\ < x_j + m_j \Delta_{jj} + \sum_{i \neq j} m_i \Delta_{ij} \end{aligned}$$

これを変形すると

$$(m'_j - m_j) \Delta_{jj} < \sum_{i \neq j} (m_i - m'_i) \Delta_{ij} \leq 0$$

このとき $\Delta_{ii} > 0$, $\Delta_{ij} \leq 0$ であるから、 $m'_j < m_j$ である。したがって $\phi_{j_1} \cdots \phi_{j_h}(x) \notin \mathcal{S}$ のとき、少なくとも一つは強い不等号 $m'_j < m_j$ が成り立つ。□

4.3 外生需要オペレータ a_i の可換性

命題 4.2 から、安定な在庫配列 $x \in \mathcal{S}$ に対して 1 単位の外生需要が加わったときの a_i による変換は次のように「表現」できる。

$$a_i(x) = \prod_{i \in N} \phi_i^{m_i}(x - \delta_i) = x - \delta_i + m\Delta \quad (11)$$

ここで、外生需要が 1 単位ではなく、企業 i に y_i 単位ずつ $y = (y_1, \dots, y_n)$ というベクトルの形で生じたとしよう。このとき各企業は外生需要による在庫の減少に応じて (S, s) 的在庫調整を行い、それに伴って各企業に派生需要が生じる。すなわち a_1 が y_1 個、 a_2 が y_2 個、 \dots a_n が y_n 個ずつ経済に作用し、外生需要ベクトル y に対する複合した在庫調整過程が $a_1^{y_1} a_2^{y_2} \cdots a_n^{y_n}$ という合成写像として作用することになる。もし同じ外生需要ベクトル

^{注 8)} この系は、産業連関分析におけるソロー条件と同等の意味の条件といえる。また、Chan(1994) は、より詳細な数学的議論によりグラフ理論の Matrix Tree 定理を応用して、行列式を用いた条件を証明している。

ル $y = (y_1, \dots, y_n)$ に対して、演算の順序を入れ替えた

$$\begin{aligned} g &= a_1^{y_1} \cdots a_i^{y_i} \cdots a_j^{y_j} \cdots a_n^{y_n} \\ g' &= a_1^{y_1} \cdots a_j^{y_j} \cdots a_i^{y_i} \cdots a_n^{y_n} \end{aligned}$$

が異なった結果をもたらすとしたら、一つの外生的攪乱ベクトル y に対して複数の演算 g, g' が対応することになる。すなわち a_i の可換性が成り立たないとする、外生需要 y の作用を一意に表せないことになり、分析は非常に難しくなる。

a_i の可換性については、Sandpile Model の枠組みにおいて Dhar(1990) により次のような有用な命題が得られている。

命題 4.3 (Dhar(1990)). a_i は可換である。すなわち任意の i, j について、 $a_i a_j = a_j a_i$

ただし Dhar(1990) は、本論文における生産オペレータ ϕ に相当する演算子の可換性をもって命題の証明としている^{注9)}。しかし生産オペレータ ϕ が可換であっても、派生需要の相互作用による複雑な ϕ の連鎖から構成される外生需要オペレータ a_i が可換であるとは限らない。以下に、在庫調整過程も含めた厳密な証明を与える。

証明. いま任意の企業 $i, j \in N$ に 1 単位の外生需要が生じたとする。ここで、すべての $i, j \in N$ について $\Phi \cdot \Upsilon_j(\Phi \cdot \Upsilon_i(x)) = \Phi(\Upsilon_j(\Upsilon_i(x)))$ であることを示せばよい。ただし外生需要によって片方もしくは両方の企業の在庫が下限を下回らず生産および派生需要が生じない場合には、自明に成立するので、外生需要によって双方の企業の在庫が下限を下回る場合のみ考えることにする。

いま、企業 i への外生需要が引き起こす在庫調整過程が終了してから、企業 j の外生需要が生じるとし、各外生需要オペレータに対して生産を行う企業のインデックスの最小の数列を、それぞれ $\{i_1, \dots, i_k\}, \{j_1, \dots, j_k\}$ とする。このとき演算の全体は次のようになる。

$$\Phi \cdot \Upsilon_j(\Phi \cdot \Upsilon_i(x))$$

$$\begin{aligned} &= \phi_{j_h} \cdots \phi_{j_2} \cdot \phi_{j_1} \cdot \Upsilon_j(\phi_{i_k} \cdots \phi_{i_2} \cdot \phi_{i_1} \cdot \Upsilon_i(x)) \\ &= x' \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

k は最小の数であるから ϕ_{i_k} は必ず x に作用する。また Υ_j は企業 j の在庫の水準を減少させるだけであるから ϕ_{i_k} と Υ_j を入れ替えても結果は変わらない。同じ理由を繰り返すと、 Υ_j を一番左まで移動させることができる。

$$\begin{aligned} &\Phi \cdot \Upsilon_j(\Phi \cdot \Upsilon_i(x)) \\ &= \phi_{j_h} \cdots \phi_{j_1} \cdot \Upsilon_j(\phi_{i_k} \cdots \phi_{i_1} \cdot \Upsilon_i(x)) \\ &= \phi_{j_h} \cdots \phi_{j_1} \cdot \phi_{i_k} \cdot \Upsilon_j(\phi_{i_{k-1}} \cdots \phi_{i_1} \cdot \Upsilon_i(x)) \\ &= \phi_{j_h} \cdots \phi_{j_1} \cdot \phi_{i_k} \cdot \phi_{i_{k-1}} \cdot \Upsilon_j(\phi_{i_{k-2}} \cdots \phi_{i_1} \cdot \Upsilon_i(x)) \\ &\dots\dots \\ &= \phi_{j_h} \cdots \phi_{j_1} \cdot \phi_{i_k} \cdots \phi_{i_1} (\Upsilon_j \cdot \Upsilon_i(x)) \\ &= \Phi \cdot \Upsilon_j \cdot \Upsilon_i(x). \end{aligned}$$

これより題意は成立。 □

4.4 在庫調整過程の経済学的特性

演算 a_i の可換性が成立すれば、

$$\begin{aligned} g &= a_1^{y_1} \cdots a_i^{y_i} \cdots a_j^{y_j} \cdots a_n^{y_n} \\ &= a_1^{y_1} \cdots a_j^{y_j} \cdots a_i^{y_i} \cdots a_n^{y_n} = \prod_{i \in N} a_i^{y_i} \end{aligned}$$

と表すことができ、演算の順序に関わらず g は一意にある^{注10)}。この一意性によって外生需要ベクトル $y = (y_1, \dots, y_n)$ に対する複合的な (S, s) 調整過程の全体が一意的な演算 g と表すことができる。複合的な調整過程の間に生じる各企業 i の生産オペレータ ϕ_i の作用回数をあらためて $m = (m_1, \dots, m_n)$ とすれば、外生需要によって在庫配列ベクトル x の遷移式は、次のように表すことができる。

$$x' = \prod_{i \in N} a_i^{y_i}(x) = \Phi(x - y) = x - y + m\Delta \quad (12)$$

^{注9)} Dhar(1990) による証明は、本論文のモデルに置き換えると次のようなものである。すなわち、任意の二つの生産オペレータの積 $\phi_{i_1} \phi_{i_2}$ は、それぞれの企業の生産によっての影響を受ける企業 j の在庫水準を $x_j + \Delta_{i_1,j} + \Delta_{i_2,j}$ に変換する。しかしこれは演算の順序を変え $\phi_{i_2} \phi_{i_1}$ としても $x_j + \Delta_{i_2,j} + \Delta_{i_1,j}$ であるから同等である。よって局所的安定化作用素 ϕ_i は可換であり、このことから a_i の可換性も成り立つ。しかし Dhar(1990) のこの証明の議論は、 ϕ_i の可換性と a_i の可換性を混同したものであり、必ずしも外生的攪乱作用素 a_i の可換性を証明していることにはならない。

^{注10)} Dhar(1990) は、このような可換な（アーベル的な）演算によって記述できる (S, s) 的調整モデルのクラスを Abelian Sandpile Model (ASM) と名づけた。またこのクラスの問題は、離散数学において Chip Firing Game とも呼ばれる。

表 1: 一般化された (S, s) 経済の産業連関構造

	中間需要					外生需要	在庫変動	総生産
中間投入	0	...	$-m_i(t)\Delta_{i1}$...	$-m_n(t)\Delta_{n1}$	$y_1(t)$	$x_1(t+1) - x_1(t)$	$m_1(t)\Delta_{11}$
	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	
	$-m_1(t)\Delta_{1j}$...	0	...	$-m_n(t)\Delta_{nj}$	$y_j(t)$	$x_j(t+1) - x_j(t)$	$m_j(t)\Delta_{jj}$
	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	
	$-m_1(t)\Delta_{1n}$...	$-m_i(t)\Delta_{in}$...	0	$y_n(t)$	$x_n(t+1) - x_n(t)$	$m_n(t)\Delta_{nn}$
付加価値	$\Pi_1(t)$...	$\Pi_i(t)$...	$\Pi_n(t)$			
総生産	$m_1(t)\Delta_{11}$...	$m_i(t)\Delta_{ii}$...	$m_n(t)\Delta_{nn}$			

ここで企業 j の要素だけを取り出して、企業 j の在庫保有の遷移方程式を得ると次のようになる。

$$x'_j = x_j - y_j + m_j\Delta_{jj} + \sum_{i \neq j} m_i\Delta_{ij}$$

これを变形すると、以下の関係を得る。

$$\underbrace{\overbrace{m_j\Delta_{jj} + \sum_{i \neq j} m_i\Delta_{ij}}^{\text{付加価値}}}_{\text{総生産}} = \underbrace{y_j + \underbrace{(x'_j - x_j)}_{\text{在庫変動}}}_{\text{最終需要}} \\ \text{中間投入}$$

一方、当該期の間に企業 j が m_j 回生産を行ったとすると、その期における経済全体の総付加価値は、式 (4) より

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} m_j \pi_j &= \sum_{j \in N} m_j (\Delta_{jj} + \sum_{i \neq j} \Delta_{ji}) \\ &= \sum_{j \in N} \left[m_j \Delta_{jj} + \sum_{j \neq i} m_j \Delta_{ji} \right] \end{aligned}$$

となる^{注 11)}。

以上より、本節における主要な経済学的帰結として以下の定理が得られる。

定理 4.1. 投入産出行列 Δ が条件 3.1 をみたしかつ分解不能ならば、外生需要ベクトル $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}_0^+$ に対して、(S, s) 経済の在庫調整過程は一意的在庫配列に有限時間内に収束し、調整過程から生み出される付加価値も有限かつ一意である。

^{注 11)} この最終需要と企業利潤は、産業連関分析における販路構成と費用構成に対応する。ここでは、 Δ をネット・プット・ベクトルによって構成される行列としているため、企業は自身の生産物を投入として用いない場合が書かれているが、自身の生産物を投入として含むように定式化しても議論は変わらない。

5 長期における再帰的集合

5.1 演算 a_i の代数構造

安定な在庫配列ベクトル $x \in \mathcal{S}$ の中で、任意の外生需要 $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}_0^+$ による演算 $g = \prod_{i \in N} a_i^{v_i}$ によって再び同じ配列に戻ってくる在庫配列ベクトルの集合

$$\mathcal{R} = \left\{ x \in \mathcal{S} \mid \prod_{i \in N} a_i^{v_i}(x) = x \right\} \quad (13)$$

を再帰的な在庫配列ベクトル集合と定義する。また集合 \mathcal{S} における集合 \mathcal{R} の補集合 \mathcal{R}^c を推移的な在庫配列ベクトルの集合とする。

命題 5.1. \mathcal{R} は非空である。

証明. 安定な空間 \mathcal{S} の位数 $|\mathcal{S}|$ は高々 $\prod_{i \in N} \Delta_{ii}$ 個に過ぎないから、有限の外生需要による攪乱によって、必ず再び同じ状態ベクトルに戻ってくる。□

いま、再帰的集合 \mathcal{R} 上に働く演算 $g = \prod_{i \in N} a_i^{v_i}$ の集合を

$$G = \left\{ g \mid \prod_{i \in N} a_i^{v_i}(x) = x'; x, x' \in \mathcal{R} \right\} \quad (14)$$

と定義すると、演算の集合 G が次のような代数構造をもつことを示すことができる。

命題 5.2. G は可換群（アーベル群）をなす。

証明. $\forall g, g' \in G$ ならば

$$\begin{aligned} gg' &= \prod_{i \in N} a_i^{v_i} \prod_{i \in N} a_i^{v'_i} \\ &= \prod_{i \in N} a_i^{v_i + v'_i} \in G \end{aligned}$$

であるので、 G は積について閉じている。また

$$\begin{aligned} \prod_{i \in N} a_i^{v_i} \left(\prod_{i \in N} a_i^{v'_i} \prod_{i \in N} a_i^{v''_i} \right) \\ &= \left(\prod_{i \in N} a_i^{v_i} \prod_{i \in N} a_i^{v'_i} \right) \prod_{i \in N} a_i^{v''_i} \\ &= \prod_{i \in N} a_i^{v_i + v'_i + v''_i} \in G \end{aligned}$$

となるため積に関して結合則が成り立つ。

\mathcal{R} の定義から、ある $x_1 \in \mathcal{R}$ をについて

$$\prod_{i \in N} a_i^{m_i}(x_1) = x_1$$

となる $m = (m_1, \dots, m_i, \dots, m_n)$ が必ず存在する。
ここで、

$$e_1 \equiv \prod_{i \in N} a_i^{m_i}$$

とおき、 $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$ となる集合

$$\mathcal{A} \equiv \{x_2 \in \mathcal{R} \mid e_1(x_2) = x_2\}$$

を取ると、 $x_1 \in \mathcal{A}$ だから $\mathcal{A} \neq \emptyset$ である。また、ここで任意の $g \in G$ によって写された $g(x_2)$ について、可換性から $e_1(g(x_2)) = g(e_1(x_2)) = g(x_2)$ となるため、 $\mathcal{A} \supset \mathcal{R}$ 。したがって $\mathcal{A} = \mathcal{R}$ である。これより e_1 は単位元であるから、積に関して $ge = eg = g$ となる単位元 e が存在する。

以上の単位元 e の議論から、

$$a_i^{-1} \equiv a_i^{m_i-1} \prod_{j \in N/\{i\}} a_j^{m_j} \quad (15)$$

とすれば、

$$\begin{aligned} a_i a_i^{-1} &= a_i \left(a_i^{m_i-1} \prod_{j \in N/\{i\}} a_j^{m_j} \right) = e \\ a_{-1} a_i &= \left(a_i^{m_i-1} \prod_{j \in N/\{i\}} a_j^{m_j} \right) a_i = e \end{aligned}$$

となり、 $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ となる逆元 g^{-1} が存在する。また命題 4.3 より $a_i, a_j \in G$ は可換であることが示されている。

以上より G は可換群の定義をみたす。 \square

また、単位元に関して次の命題が得られる。

命題 5.3.

$$\prod_{j \in N} a_j^{\Delta_{ij}} = e \quad (16)$$

証明. 企業 i に Δ_{ii} 単位の外生需要があると、必ず在庫の下限を下回るから生産を行い、当初の在庫水準を回復する。企業 i が生産を行うと、企業 i と産業連関のある企業 j に Δ_{ij} 単位派生需要が生じるから、企業 j の在庫量を $-\Delta_{ij}$ 単位減少させる。これは企業 j に $-\Delta_{ij}$ 単位の外生需要があったのと同じである ($\Delta_{ij} < 0$ であることに注意)。したがって、

$$\prod_{i \in N} a_i^{\Delta_{ii}} = \prod_{j \in N/\{i\}} a_j^{-\Delta_{ij}}$$

が成り立つ。逆元 $g^{-1} \in G$ が定義されているから、題意の関係を導く。 \square

5.2 G の位数

次に群 G の位数を求める。いま、 x_1 の G による軌道を $G(x_1) = \{g(x_1) \in \mathcal{R} \mid g \in G\}$ 、 G の x_1 に関する固定部分群を $G_{x_1} = \{g \in G \mid g(x_1) = x_1\}$ とする。このとき、群 G の位数に関して次の命題が成り立つ。

命題 5.4. \mathcal{R} 上に働く群 G の位数は \mathcal{R} の位数に等しい。すなわち

$$|G| = |\mathcal{R}| \quad (17)$$

証明. x_1 の軌道 $G(x_1)$ は、 \mathcal{R} を全て覆うから $G(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{|\mathcal{R}|}\}$ となる。したがって $|G(x_1)| = |\mathcal{R}|$ 。

次に、 x_1 を x_k に写す元 $g_k, g'_k \in G$ をとると $g_k(x_1) = g'_k(x_1) = x_k$ 。ここで g_k の逆元が存在して $g_k^{-1}g'_k(x_1) = x_1$ となるので、固定部分群の元 $g_k^{-1}g'_k \in G_{x_1}$ である。 $g'_k \in g_k G_{x_1}$ と変形すれば、任意の g'_k は g_k を代表元とする G_{x_1} の同じ左剰余類 $g_k G_{x_1}$ に属する。したがって G の x_1 における固定部分群 G_{x_1} による左剰余類による類別

$$G = \bigcup_{k=1}^{|\mathcal{R}|} g_k G_{x_1}$$

が得られる。

ここで、群 G の元 g が、 G の G_{x_1} による左剰余類 $g_k G_{x_1}$ の元であるということと、 g_k は x_1 が x_k を通るような軌道を与えるということは同値であるから、

$$\begin{aligned} g'_1 \in g_1 G_{x_1} &\Leftrightarrow g'_1(x_1) = x_1 \\ g'_2 \in g_2 G_{x_1} &\Leftrightarrow g'_2(x_1) = x_2 \\ &\vdots \\ g'_{|R|} \in g_{|R|} G_{x_1} &\Leftrightarrow g'(x_1)_{|R|} = x_{|R|} \end{aligned}$$

となり、 G の G_{x_1} の左剰余類の集合と軌道 $G(x_1)$ とが 1 対 1 に対応する。 $g_i = g'_i$ とすると $|G| = |G(x_1)| = |R|$ 。□

5.3 再帰的配列の集合 \mathcal{R} の位数

外生需要ベクトル v の集合 \mathbf{Z}^n から G への写像 \mathcal{M} を次のように定義しよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{M}: \mathbf{Z}^n &\longrightarrow G \\ \begin{matrix} \Downarrow & \Downarrow \\ v & \longmapsto \end{matrix} g &= \prod_{i \in N} a_i^{v_i} \end{aligned} \quad (18)$$

ここで写像 \mathcal{M} については次の補題が成り立つ。

補題 5.1. $\mathcal{M}: \mathbf{Z}^n \rightarrow G$ は準同型写像である。

証明. 写像 \mathcal{M} の定義から

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(v+u) &= \prod_{i \in N} a_i^{v_i+u_i} \\ &= \prod_{i \in N} a_i^{v_i} \prod_{i \in N} a_i^{u_i} \\ &= \mathcal{M}(v)\mathcal{M}(u) \end{aligned}$$

となる。□

また、次のような集合

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\Delta_i \equiv \left\{ \sum_{i \in N} \lambda_i \Delta_i \mid \lambda_i \in \mathbb{Z} \right\} \quad (19)$$

を定義すると、写像 \mathcal{M} の核 $\text{Ker}(\mathcal{M})$ に関して、次の補題が得られる。

補題 5.2.

$$\text{Ker}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\Delta_i \quad (20)$$

証明. 任意の $\lambda_i \in \mathbf{Z}$ について

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left(\sum_i \lambda_i \Delta_i\right) &= \prod_{j \in N} a_j^{(\lambda_1 \Delta_{1j} + \dots + \lambda_n \Delta_{nj})} \\ &= \prod_{j \in N} a_j^{\lambda_1 \Delta_{1j}} \dots \prod_{j \in N} a_j^{\lambda_n \Delta_{nj}} \\ &= \left(\prod_{j \in N} a_j^{\Delta_{1j}}\right)^{\lambda_1} \dots \left(\prod_{j \in N} a_j^{\Delta_{nj}}\right)^{\lambda_n} \\ &= e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} = e \end{aligned}$$

したがって $\text{Ker}(\mathcal{M}) \supset \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\Delta_i$ である。一方、 $\forall v \in \text{Ker}(\mathcal{M})$ については

$$x = \prod_{i \in N} a_i^{v_i}(x) = x - v + m\Delta$$

となるから、これより

$$v = m\Delta \in \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\Delta_i$$

したがって $\text{Ker}(\mathcal{M}) \subset \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\Delta_i$ となる。□

これより、 G の位数についての次の命題が得られる。

命題 5.5.

$$\mathbf{Z}^n / \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\Delta_i \cong G \quad (21)$$

証明. 補題 5.1, 補題 5.2 および \mathcal{M} は全射であることから、 \mathcal{M} は準同型定理を満たす。□

これらの補題より、 \mathcal{R} の位数について以下の命題が得られる^{注 12)}。

命題 5.6 (Dhar(1990)).

$$|\mathcal{R}| = \det \Delta \quad (22)$$

証明. 命題 5.4 と命題 5.5 から、

$$|\mathcal{R}| = |G| = |\mathbf{Z}^n / \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\Delta_i|$$

右辺は $\text{vol}(\Delta) = \det \Delta$ に等しい。□

以上の議論から、次の結論が得られる。

定理 5.1. 再帰的な在庫配列の集合のサイズ $|\mathcal{R}|$ は、投入産出構造を表す行列 Δ の行列式によって決まる。

^{注 12)} 本論文の経済モデルは、理論物理における sandpile model と構造上同等であり、この命題は sandpile model の研究における Dhar(1990) の命題に対応する。

5.4 再帰集合 \mathcal{R} 上の定常測度

本節の最後に、長期における在庫配列の分布を議論する。いま、每期 1 企業にのみ確率的に需要が降り注ぐと仮定する。企業 $i \in N$ に需要が生じる確率 p_i は、 $0 \leq p_i \leq 1$, $\sum_i p_i = 1$ をみたす。

$\forall x \in \mathcal{R}$ に対して x の測度を $\pi_t(x)$ とすると、マスター方程式は

$$\begin{aligned} \pi_{t+1}(x) &= \pi_t(x) + \sum_{x' \in \mathcal{R}} \pi_t(x') P(x', x) \\ &\quad - \sum_{x' \in \mathcal{R}} \pi_t(x) P(x, x') \end{aligned}$$

と書くことができる。ただしここで

$$\begin{aligned} P(x, x') &= \sum_{i=1}^N p_i f(a_i x = x'), \\ f(a_i x = x') &= \begin{cases} 1 & \text{if } x = a_i^{-1} x' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} P(x', x) &= \sum_{i=1}^N p_i f(a_i^{-1} x = x'), \\ f(a_i^{-1} x = x') &= \begin{cases} 1 & \text{if } x = a_i x' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

である。

再帰的在庫配列の集合 \mathcal{R} は規約であるから、不変測度は存在すれば必ず一意である。これを用いると以下の補題が得られる。

補題 5.3. 定常分布は一様分布である。

証明. $a_i : x \mapsto a_i x$ は 1 対 1 写像 (bijection) であるから、 a_i を作用させて x になる配列 $a_i^{-1} x \rightarrow x \rightarrow a_i x$ が一意に決まり $f(a_i^{-1} x = x) = f(x = a_i x) = 1$, それ以外は 0 ということになる。したがって

$$P(a_i^{-1} x, x) = P(x, a_i x) = p_i$$

x の軌道 $G(x)$ は \mathcal{R} のすべてを覆うから、すべての i について $a_i^{-1} x$ が存在し、

$$\begin{aligned} \sum_{x' \in \mathcal{R}} \pi_t(x') P(x', x) &= \sum_{i=1}^N \pi_t(a_i^{-1} x) p_i \\ \sum_{x' \in \mathcal{R}} \pi_t(x) P(x, x') &= \sum_{i=1}^N \pi_t(a_i x) p_i \end{aligned}$$

これよりマスター方程式は次のように書き直せる。

$$\pi_{t+1}(x) = \pi_t(x) + \sum_{i=1}^n p_i \left\{ \pi_t(a_i^{-1} x) - \pi_t(a_i x) \right\}$$

不変測度は一意であるから、一様測度が不変であることを示せば十分である。一様測度 $\pi_t(a_i^{-1} x) = \pi_t(a_i x) = \pi$, $\forall x \in \mathcal{R}$ のもとでは

$$\sum_{i=1}^n p_i \left\{ \pi_t(a_i^{-1} x) - \pi_t(a_i x) \right\} = 0$$

であるから、マスター方程式は $\pi_{t+1}(x) = \pi_t(x) = \text{const.}$ となり不変測度である。 \square

命題 5.7. 再帰的な在庫配列の測度は、

$$\pi = \frac{1}{\det(\Delta)}, \quad \forall x \in \mathcal{R} \quad (23)$$

となる。

証明. 補題 5.3 より

$$\sum_{x \in \mathcal{R}} \pi(x) = |\mathcal{R}| \pi = \det(\Delta) \pi = 1$$

となることから、題意がみたされる。 \square

以上の議論から、この節における次の主要な経済学的結論が得られる。

定理 5.2. (S, s) 経済における在庫配列ベクトルの定常分布は、再帰的な在庫配列の集合 \mathcal{R} の上の一様分布である。

6 終わりに

本論文では、Caplin(1985) モデルを企業間の投入産出関係を含む一般的な (S, s) 経済に拡張し、 (S, s) 経済のマクロ動学的特性を、群論を中心とした代数的アプローチによって分析した。ミクロレベルの在庫調整過程における安定化オペレータ Φ については調整過程の安定条件と表現の一意性、外生的攪乱に対する大域的安定化作用素 a_i については、演算の可換性を示し、演算の代数構造を通じて長期的な安定集合を示した。

本論文のモデルは、需要構造を外生需要ベクトルによって与えられた部分均衡モデルを検討した。 (S, s) 経済の在庫調整過程が、需要行動にどのような影響を与え、一般均衡モデルの中でどのような意

味を持つかは検討していない。しかしモデルから得られる結論は任意のベクトルに対して成り立つから、ある消費者の最適化行動から得られる需要に対しても、本論文で得られた結論は一般に成り立つ。また、定常状態を再帰的な集合上のマルコフ連鎖として記述可能であるから、一般的な確率動学一般均衡モデルの中に組み込むことが可能だと思われる。今後の課題としたい。

参考文献

- [1] Arrow, K., Harris, T. and Marschak, J., "Optimal inventory policy", *Econometrica*, 19, 1951.
- [2] Bak, P., Tang, C. and Wiesenfeld, K., "Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ noise", *Phys. Rev. Lett.*, 59, 1987.
- [3] Bak, P., K Chan., Scheinkman, J. and Woodford, M., "Aggregate fluctuations from independent sectoral shocks: self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics", *Ricerche economiche*, 47, 1993.
- [4] Blinder, A.S., "Retail inventory behavior and business fluctuations", *Brookings Papers on Economic Activity*, 1981.
- [5] Blinder, A. S., *Inventory Theory and Consumer Behavior*, University of Michigan Press, 1990.
- [6] Blinder, A. S. and Maccini, L. J., "Taking Stock: A Critical Assessment of Recent Research on Inventories", *Journal of Economic Perspectives*, 5, 1991.
- [7] Caballero, R. and Engel, E., "Dynamic (S,s) Economies", *Econometrica*, 59, 1991.
- [8] Caplin, A., "The Variability of Aggregate Demand with S,s Inventory Policies", *Econometrica*, 1985.
- [9] Dhar, D., "Self-Organized Critical State of Sandpile Automaton Models", *Physical Review Letters*, 64, 1990.
- [10] Keynes, J.M. *The General Theory of Employment, Interest and Money*, Macmillan, 1936 (塩野谷祐一訳『ケインズ全集第七巻 雇用・利子および貨幣の一般理論』東洋経済新報社 1983) .
- [11] Nirei, M., "(S,s) inventory dynamics and self-organized criticality", *Ricerche economiche*, 54, 2000.
- [12] Ramey, V.A. and KD West., "Inventories", *Handbook of Macroeconomics*, Vol1B, 1999.
- [13] Redig, F., "Mathematical aspects of the abelian sandpile model", *Les Houches lecture notes*, 2005.
- [14] Redig, F., Meester, R. and Znamenski, D., "The abelian sandpile model, a mathematical introduction", *Markov Proc. and Rel. Fields*, 7, 2002.
- [15] Scarf, H., "The optimality of (s,S) policies in dynamic inventory method", *Mathematical Method in the Social Science*, 1959.
- [16] Scheinkman, J.A. and Woodford, M., "Self-organized criticality and economic fluctuations", *American Economics Association Papers and Proceedings*, 84, 1994.

On the Algebraic Structure of Discrete Quantity Adjustment Processes

Naoto YAGI

2016年2月

新潟産業大学経済学部紀要 第46号別刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.46 February 2016