和算における開平法のルーツ
—ギリシャから日本まで—

堀　口　俊　二

2008年10月
新潟産業大学経済学部紀要　第35号別刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.35　October　2008

和算における開平法のルーツ
―ギリシャから日本まで―

堀　口　俊　二

1. 序

江戸時代に発達した数学を**和算（本朝数学）**という．その後明治時代に西洋から輸入した数学を**西洋数学（洋算）**という．和算は西洋数学の影響をほとんど受けない日本固有の数学と考えられている．ここ20〜30年間で和算研究に進展が見られるようになった．和算の研究書にも，事実だけを記述した辞典ものから，幅広く関連する事柄を取り入れて考察したものや，諸外国との関連を考察したもので，一般の人にも読みやすく解説されたものが出版されている．本稿はこのような進展を踏まえた和算の開平法・開立法（平方根・立方根を求めるアルゴリズム）のルーツが，ヨーロッパを経由した古代ギリシャ数学であるという一考察である．本稿ではプトレマイオスの『アルマゲスト』およびその周辺に焦点を当てることにより，考察して行く．そのため古代バビロニア・ギリシャ，中世アラビア・ヨーロッパの情報が必要となり，インターネットも一部利用した．開平法と開立法は同じルーツを辿るので，開平法のルーツを調べる．

§2 は日本の江戸時代の百川治兵衛の開平法を説明する．§3 は古代バビロニア・ギリシャの開平法を推測・解説する．§4 は，ギリシャの開平法が，ルネッサンス時代のヨーロッパに輸入にされるまでの流れを考察する．§5 は，平山諦説によるヨーロッパから日本まで伝わる流れを説明する．§6 は纏めである．付録は本論の補足であると共に，その進行を停滞させない役割りを担う．

2. 百川忠兵衛（治兵衛）『新編諸算記』の開平法

百川治兵衛（ももかわじへえ）（1580－1638）は日本の江戸時代初期の和算家であり，『諸勘分物』（しょかんぶんぶつ）（1622）を著した．百川が亡くなった3年後に，門弟たちは百川忠兵衛（治兵衛の改名）著として『新編諸算記』（1641年（寛永18））を大坂で出版した．この見出しに「開平法口伝（くでん）知ル」とあり，人から教えられたと記述しており，開平法・開立法が 11 枚（ 22 ページ）にも及んで明確に説明してある．開平法は以下のようにして求められる．

数 $A(>0)$ の平方根を求めるには，$A=(a+c)^2$ $(a>0,\ c>0)$ として a と c を求めればよい．このとき a^2 が A に十分近くなるような数 a を選べば，c は a より十分小さい数となる．$(a+c)^2$ を展開する．

$$A=(a+c)^2=a^2+2ac+c^2$$

$$A-a^2=2ac+c^2$$

$2ac+c^2$ において，c^2 は $2ac$ より小さいから捨てて

$$c \fallingdotseq \frac{A-a^2}{2a} \quad （正確には\ c<\frac{A-a^2}{2a}）$$

したがって $\sqrt{\mathrm{A}}$ の近似値

$$\sqrt{A} \fallingdotseq a+\frac{A-a^2}{2a} \qquad (1)$$

を得る．西洋では (1) を**ニュートンの近似式**と呼んでいる．(1) は以下のように使用する．先ず a^2 が A に近くなるような適当な数 a_0 を見つける．(1) の右辺に $a=a_0$ を代入し，その値を a_1 とする．これは $\sqrt{A}$ の第 1 近似値を与える．次に a_1 を再び (1) に代入して

$$a_1+\frac{A-a_1{}^2}{2a_1}$$

を計算すれば，さらに良い第 2 近似値 a_2 が得られる．これは現代では**再帰的アルゴリズム**と呼ばれていて，以下の漸化式で表わされる：

$$a_{n+1}=a_n+\frac{A-a_n{}^2}{2a_n}\,(n=0, 1, 2, \cdots) \qquad (2)$$

これを $\sqrt{A}$ を求める**ニュートン法の漸化式（反復式）**という．この例は§3 のテオンのところで与えられるだろう．この漸化式は，後に生まれたニュートン（Isaac Newton, 1643–1727）が発見した微分を使い得られるものである．(1) は代数演算から得られるもので，微分を用いた接線から得られるものではないことに注意せよ．微分を使って (1) を導く方法は，付録にまわす．

最初の和算書といわれる『算用記』（著者不明，安土桃山時代から江戸時代初期の著作，龍谷大学所蔵）と毛利重能(しげよし)著『割算書』（1622）には目次に開平法はないが，開平法に繋がる問題や開平・開立の定義が与えられている．また吉田光由(みつよし)著『塵劫記(じんこうき)』（1627）には開平・開立が目次にあり，開平法・開立法を詳しく記述している．しかし光由はこれらをよく理解していなかった．百川治兵衛こそが日本で始めて開平法・開立法を理解した和算家なのである（平山 [1, p. 62]，鈴木武雄 [2, pp. 15–16]）．

3. バビロニアとギリシャの開平法

平方根を求めるアルゴリズムの歴史で，最も古いものとして，バビロニア人の方法（推測）がある．ギリシャはバビロニアの数学を輸入したので，最初にこれを説明する．

バビロニアの開平法　紀元前4000年～3500年にチグリス・ユーフラテス河流域でバビロン王朝の文明が栄えた．紀元前1900年頃のバビロニアの YBC7289 という粘土板には，正方形とその対角線が描かれている．この正方形には，1 辺の長さの $\sqrt{2}$ 倍が対角線の長さになることが楔(くさび)文字で記されている．興味を引きつけられるのは，この $\sqrt{2}$ の値が 60 進数で 1；24, 51, 10 と記述されており，これを 10 進数に直すと 1.414212896… となり，小数点以下第 5 位まで正しく求められていることである．バビロニア人は $\sqrt{A}$ の近似値を $a(>0)$ としたとき，より精度の高い近似式に次の (3), (4) を使ったと推測される．

$$\sqrt{a^2+b} \fallingdotseq a+\frac{b}{2a} \qquad (3)$$

$$\sqrt{A} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(a+\frac{A}{a}\right) \qquad (4)$$

バビロニア人は代数恒等式 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ を知っていた［5, p. 33］.(3) は百川の開平法の導き方と同じである．(3) は (1) において $A-a^2=b$ とおけば得られる．(3) はニュートンの近似式といってもよい．

(4) は次のように求められる．正方形の面積が A のとき，$\sqrt{A}$ はその一辺の長さである．$\sqrt{A}$ の近似値を a とする．これを縦として，面積が A に等しい長方形（正方形に近い形）を考えると，横の長さは $\frac{A}{a}$ となるが，これも $\sqrt{A}$ の近似値を与える．ここで，a を $\sqrt{A}$ より大きく（小さく）選べば，$\frac{A}{a}$ は $\sqrt{A}$ より小さく（大きく）なる．したがって a と $\frac{A}{a}$ の算術平均 (4) は $\sqrt{A}$ のより良い近似値を与える．

(1), (3) と (4) は現代の代数演算で $A=a^2+b$ を経由して簡単に移り変わる．しかし古代バビロニア人は文字式を使うレベルではなかったから，彼等はこれらの式を自在に移り変えたかどうか分からない．15 世紀までの数学は，量，条件，計算および答のほとんどは言葉だけで説明されていた．(4) から導かれる再帰的アルゴリズムは，現在でも電卓の平方根を求めるプログラムにも使われているから，古代バビロニアの数学がそのまま現代に引き継がれている．実際に (3), (4) を使った数値例は付録を参照せよ．(4) からは次に説明するヘロンのアルゴリズムが導かれる．

ギリシャの開平法　紀元前 7 世紀から紀元前 1 世紀頃にかけて古代ギリシャの科学が栄えた．古代ギリシャ人は，バビロニアとエジプトの両方から数学を輸入した．紀元前 3 世紀から紀元後 4 世紀頃に，ナイル河口のアレクサンドリアが地中海の政治，経済，文化の中心になり，ギリシャ科学が移植された．アレクサンドリアの数学は高度な発達をとげ，幾何学を天文学，光学，医学などの諸科学に応用した．アレクサンドリアには，ユークリッド，アルキメデス，ヘロン，プトレマイオス，テオンなどの数学者がいた．ここでは平方根およびそれを求めるアルゴリズムが，これらの数学者により，どのように取り扱われたか時系列で説明して行く．

ユークリッド（Euclid, B.C. 330?–275?）は有名な『幾何学教科書』13 巻を著した．ユークリッド『原論』ともいわれる．この著書は科学史を通じて最大の教科書と言われた．これはピュタゴラスやプラトンなどの伝統的なギリシャ幾何学を集大成し，幾何学の問題を少数の公理や定理から演繹して，見事な論理体系に統一したものである．これが俗にいうところの「ユークリッド幾何学」である．『原論』第 2 巻は幾何学的な記述により代数方程式の解法を取り扱っている．これはバビロニアの代数を整理して証明を付けたような内容になっている［15］．命題 2–14 は「与えられた直線図形に等しい正方形をつくること」である．これは文字式では $x^2=c$ で表わされ，これを解くことがユークリッドの目標である．また『原論』第 10 巻では無理数を扱っている．したがってユークリッドは平方根を求めるアルゴリズムを知っていたかも知れない．

アルキメデス（Archimedes, B.C. 287?–212）は南イタリアのシケリア島のシュラクサイで生まれ，若い頃，アレクサンドリアに留学し，その後故郷に帰り，一生をシュラクサイで過ごした．数学者・工学者[1]である．アルキメデスは，ニュートン（1642–1727），**ガウス**（Johann Carl Friedrich Gauss, 1777–1855, ドイツ）[2]と共に世界 3 大数学者の一人に数えられる．

アルキメデスは平方根を計算する方法を知っていた（上垣［11］）．アルキメデスは円周率を計算するときに，$\sqrt{3}$ の値を求める必要があった．そのため

$$\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780} \qquad (5)$$

という不等式を導いた．しかしアルキメデスはこの不等式をどのようにして得たかは説明していない．この計算方法については多くの数学史家が推測しているが，よく知られるバビロニアの方法 (3) を使ったと推測される．(3) から不等式

$$a\pm\frac{b}{2a\pm1}<\sqrt{a^2\pm b}<a\pm\frac{b}{2a}\ (\text{複号同順}) \qquad (6)$$

が得られる．アルキメデスは不等式 (6) を使用することができたと推測される．このことからアルキメデスはニュートンの近似式を知っていたと推測される．(6) の不等式の a，b に数値を当てはめて行くと不等式 (5) が得られる．その導き方は上垣［11, pp. 49–53］に詳しい解説がある．

さらにアルキメデスは次に説明するヘロンの公式をヘロンより先に発見したといわれている．

ヘロン（Heron of Alexandria）は，B.C. 150–A.D. 200 の間あるいは 65?–125? 時代の人で，エジプトのアレクサンドリアの生まれと思われる．数学者・物理学者・力学者・発明家である．『測量術』（*Metrica*）を著した．この著は，バビロニアの数学のテキストの解読から，ギリシャ以前の数学と密接に結びついていることが明らかとなった．『測量術』（*Metrica*）は古い時代の数学をまとめたものとされている（浅井［10, p. 28］）．その第 1 巻には，3 角形，4 辺形，3 から 12 までの正多角形の面積と，円錐，円柱，プリズム，ピラミッド，球面の表面積を扱っている．三角形の面積を辺の長さで表すヘロンの公式とその計算に必要な平方根を近似する方法も与えられている．

ヘロンの公式とは，3 角形の 3 辺の長さが a，b，c のとき，$s=\frac{a+b+c}{2}$ とすると，その面積 S は

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (7)$$

で与えられる式のことである．ここで平方根を求める必要があり，ヘロンは次のアルゴリズムを考えた．

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{A}{a_n}\right) \qquad (8)$$

これはバビロニアの平方根の近似式 (4) から得られる．ヘロンはバビロニアのアルゴリズムを参考にしたと思われる．(8) も (2) と同様に $\sqrt{A}$ を求める**ニュートン法の漸化式（反復式）**という．この数列は $\sqrt{A}$ に収束する．ヘロンは『測量術』（*Metrica*）の中で (8) を使って $\sqrt{720}$ を計算して

1　アルキメデスの業績は，数学では球と円柱，円錐曲線体，回転楕円体，渦巻曲線，放物線など多数の著作がある．工学関係では天体の運動を再現する天象儀の設計，螺旋水揚げ機の発明，テコの原理の応用，その他多くの戦争用の器具などを作成した．アルキメデスの原理と呼ばれている浮力の原理を発見した．

2　幼くして異常な数学的才能を示した．1796年19歳のときに正 17 角形の定木とコンパスによる作図の可能なことを発見した．作図できる正多角形の種類が増えるのは約2000年ぶりのことであった．純粋数学方面では，整数論に全く新しい時代を画した．非ユークリッド幾何学，超幾何級数，複素関数論，楕円関数論，応用数学方面でも，天文学，測地学，電磁気学に不滅の貢献をした．数学の応用に関連して，最小 2 乗法，曲面論，ポテンシャル論など多方面にわたる研究をした．

いる．ヘロンのアルゴリズム (8) からニュートン法 (2) が導かれるが，ヘロンはニュートン法も知っていたのだろうか？

(2) と (8) の右辺は式変形で移り変わる．しかしアルゴリズムとして全く異なる．数値計算の永坂秀子先生によれば，(2) より (8) は演算回数が少なく計算効率がよい．また，2 進計算機の場合は，2 の除算は 1 桁のシュフトであり，丸め誤差が入らないので，(8) の方が有効である．同じ初期値 a_0 から出発すれば，(2) と (8) の第 n 近似 a_n は，計算桁末尾の丸め誤差の違いはあるが，計算桁－(マイナス) 1 桁の数値は完全に一致するとのことで，$\sqrt{2}$ に対する (2) と (8) の数値計算例を頂いた．

例 $\sqrt{2}$ を $a_0=1$ から出発し，(2) (8) で，10 進 10 桁 11 桁目 4 捨 5 入計算で計算した結果を下表に示す．

$n+1$	$a_{n+1}=a_n+\dfrac{2-a_n^2}{2a_n}$	$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{2}{a_n})$
0	1.0	1.0
1	1.5	1.5
2	1.4166 66667	1.4166 66667
3	1.4142 15686	1.4142 15687
4	1.4142 13562	1.4142 13563
5	1.4142 13562	1.4142 13563

古代バビロニア人やギリシャ人はこのようなことを知らなくても，(2) と (8) では，(8) の方が演算回数は少ないことは知っていたはずである．

クラウディオス・プトレマイオス（Claudius Ptolemaeus, 英語ではPtolemy, 約85－165）はギリシャ人天文学者・数学者・地理学者・物理学者である．エジプトのアレクサンドリアで活躍した．プトレマイオスは全 13 巻からなるギリシャ最大の数学と天文学の専門書『アルマゲスト』（*Almagest*, 数学体系，天文学体系）を著し，この中で「地球中心説＝天動説」を唱えた．この書は，その後1000年以上にわたり支持され，中世を通じて最も権威を持った書であり，1500年中頃まで地球中心説が支持された．『アルマゲスト』では，円周を 360 度に分け，直径を 120 の部分に分けた．1 度の各部分をさらに 60 に分け，その各部分をさらに 60 に細分し，バビロニアの 60 進法を引き継いでいる．ギリシャの天文学では星同士の距離を測るための弦の表として 3 角法が考案された．『アルマゲスト』には，弦の表の作成方法に関する説明や，3 角形の既知の量から未知の量を求めるために表を使う方法が述べられている．弦の表は，半径 60 の円で，中心角 AOB が 0.5° 刻みで，0° から 180° までの弦 AB の長さの表（正弦関数表に相当）であり，小数点以下第 5 位まで正確に書かれている．

カッツ［5, p. 168］は，プトレマイオスの平方根の計算について次のように述べている．「プトレマイオスは，ユークリッド幾何学の命題と平方根の計算だけで，弦の表をうまく始めることができたのである．プトレマイオスは彼より 4 世紀前のアルキメデスと同様，これらの平方根をどのように計算したかまったく言及せずに，単に結果のみを示している．」したがって，プトレマイオスは平方根を計算する方法を知っていた．

テオン（Theon，?-380）はギリシャのアレキサンドリア学派最後の数学・天文学者である．アレクサンドリア図書館の所長を務めた．ユークリッド『原論』を編纂し『アルマゲスト』の注釈書及びプトレマイオスの『簡易表』の解説書を作った．

テオンは『アルマゲスト』に関する注釈で，プトレマイオスが使ったとしてもおかしくない平方根の求め方を示している．それは「もしわれわれが任意の数の平方根を求めるとするならば，まず最も近い平方数の辺をとり，これを 2 倍し，分に換算した余りをこの積で割って，商の平方を引く．このまま進め，その余りを秒に換算し，［先ほどの］度と分の商の 2 倍でこれを割れば，求めたい正方形の面積の辺の近似を得るであろう」．テオンが示す方法は，60 進数で 2 桁の近似を与えるものである（カッツ［5, p. 168］）．この方法は文章による説明であるが，ニュートン法 (2) のようである．そこでこの文章の近似法を (2) と逐次対比させると，以下の例のように完全に一致する．

例　$\sqrt{7200}$ を計算する．

Step 1　$84^2=7056$ と $85^2=7225$ であるから，答えは［ 60 進法で表記すると］$84;x,y$ という形にならねばならない．これはニュートン法 (2) で初期値を $a_0=84$ に選ぶことである．

Step 2　$7200-84^2=144$ であるから，$144\cdot 60$（「分に換算した余り」）を $2\cdot 84$ で割ると，最も近い整数として 51 を得る．それゆえ，答えは $84;51,y$ の形であることが分かる．これはニュートン法 (2) で第 1 近似

$$a_1=a_0+\frac{7200-a_0{}^2}{2a_0}=84+\frac{7200-84^2}{2\cdot 84}$$

を求めることである．

Step 3　最後に，$7200-(84;51)^2=0;28,39$ であるから，これを秒に換算すると，1719 である．これを $2\cdot(84;51)=169;42$ で割ると，最も近い整数として 10 が得られる．したがって，求めたい平方根の近似は $84;51,10$ である．これはニュートン法 (2) で第 2 近似

$$a_2=a_1+\frac{7200-a_1{}^2}{2a_1}=84;51+\frac{7200-(84;51)^2}{2\cdot(84;51)}$$

を求めることである．

ヘロンのアルゴリズム (8) とテオンが推測するプトレマイオスのアルゴリズム (2) は移り変わる．しかしヘロンのアルゴリズムは面積計算で使用されるので 10 進法での計算であり，プトレマイオスの方法は天文学の 60 進数計算の方法なのであろう（カッツ［5, p. 184］）．

以上からアレクサンドリア時代のギリシャ数学では，(1)〜(8) が使われていたことが分かる．

4. ギリシャ数学からクラヴィウスまでの開平法の流れ

以下においては，断りのないかぎりニュートンの近似式 (1) とニュートン法の漸化式 (2) を区別しない．単に「ニュートン法」といった場合は (1) あるいは (2) を指すものとする．これは歴史の考察なので，(1) と (2) のどちらが使われたのか明確に判らないためである．

11 世紀のヨーロッパでは数学文献は多くなかった．そこでギリシャ数学とアラビア数学の一部がラテン語に翻訳されて初めて西ヨーロッパにもたらされた．ここにギリシャからの大きな時代の飛躍がある．12 世紀末までにはギリシャ数学の主要著作，アラビア数学の著作のうちのいくつか

が，ヨーロッパでラテン語で読めるようになっていた．ギリシャ数学書で翻訳された主なものは，ユークリッド『原論』，『ダタ』，アルキメデス『円の計測』，『螺旋について』，『平面の平衡について』，『パラボラの求積』，『円と円柱について』，『円錐状体と球状体について』，プトレマイオス『アルマゲスト』などである．その後数世紀をかけてこれらの著作の消化が進み，やがてヨーロッパ人自身が新しい数学を開始していった．

クラヴィウスより 50年前のフランスでは，ニュートン法は知られていなかった．

ニコラ・シュケ（Nicolas Chuquet, c. 1430–1487）は 15 世紀のフランスを代表する数学者である．シュケはフランスにおける最初の詳細な代数学の『三部作』（*Triparty*）を書いた．第 1 部は有理数の計算，第 2 部は無理数，第 3 部は方程式の理論に関するものである．この第 2 部では，平方根の求め方を説明している．それは求めたい数の平方根を，それより小さい分数と大きい分数で近似して，これを繰り返し，これらの分数により平方根に近づける方法である（詳しくはカッツ［5, pp. 397–398］を参照されたい）．これはニュートン法とは異なるアルゴリズムである．

これからギリシャ数学の開平法（ニュートン法）がクラヴィウスに伝わった流れを 5 つのルート ⑴〜⑸ から推測して行く．

⑴ 『アルマゲスト』→ テオン → クラヴィウス

クリストファー･クラヴィウス（Christopher Clavius, 1538–1612）は，当代随一のドイツの科学者であり，数学者・天文学者である．またイエズス会神父でもある．クラヴィウスは 16 世紀のユークリッドといわれ，ユークリッド『原論』の注解書（1574）を記し，当時の世界で広く読まれた．1563年から1612年までローマ学院（＝コレジオ・ロマノ，現グレゴリアン大学）の数学教授を勤めた．ローマ学院の教育カリキュラムは以下である．

第 1 年：ユークリッド『原論』，実用算術，天球論
第 2 年：音楽理論，光学
第 3 年：天文学―プールバッハ（Georg Purbach, 1423–1461, オーストリア）の『惑星の新理論』（1472），プトレマイオスの『アルマゲスト』の一部，アルフォンソ表（惑星の運行表），アストロラーブ（正確な時間と方角を知ることが出来る天体観測儀）

ここで注意しなければならないのは，1400年から1800年前の古代ギリシャのユークリッド『原論』や『アルマゲスト』がそのまま引き継がれて教えられていることである．したがってクラヴィウスは『アルマゲスト』の内容を知っていた．しかも安［4, p. 161］の2007年の最新の研究によると，クラヴィウスはテオンの『アルマゲスト』の注釈書をコメンタリー（論評）の中で挙げている．この注釈書でテオンはプトレマイオスが平方根を求めるのにニュートン法 ⑵ を使ったと推測している．クラヴィウスは『*Epitome Arithmeticae Practicae*』（1583，初版，『実用算術摘要』）を書いたが，ここにはニュートンの近似式 ⑴ が書かれている．これはテオンの『アルマゲスト』の注釈書にあるニュートン法 ⑵ からヒントを得た可能性が推測される．

⑵ ギリシャ数学のニュートン法 → アラブの数学者 → パチョーリ → ヌネシュ → クラヴィウス

アラビア数学は，ギリシア数学やインド数学の影響を受け発展し，アル・フワーリズミー（Al-Khwarizmi，780頃–850）やアル・バッターニー（Al-Battānī, 850頃–929）など多数の数学者を輩出した．このうちニュートン法に関連する数学者は以下の 3 名である．

アル・カルキ（al–Karkhi, 953–1029）は，カリフ（現在のバクダッド）の都で，数学に真に貢献した最後の人達の中の一人である．著作『*Kafi fil Hisab*』（算術）では，平方根の近似値を求める式にニュートンの近似式 (1) を使っている．また，平面図形の計算，特に無理数を扱うようなものについて考えており，ヘロンの公式 (7) を含んでいる．アル・カルキは『*Fakhri*（ファクリ）』（代数）の著者としてよく知られていて，これはアラビア人の最も学問的な代数として位置付けられている．

シャラフ・アル・ディン・アル・ツシ（Sharaf al-Din al-Tusi, 1135–1213）はイスラムの数学者・天文学者である．アル・ツシはニュートン法を知っていた．

ナシル・アル・ディン・アル・ツシ（Nasir al-Din al-Tusi, 1201–1274）はシャラフ・アル・ディン・アル・ツシの孫弟子である．アル・ツシは 13 世紀のイスラム世界を代表する偉大な学者である．アル・ツシはギリシアのテキストの多くの論評を書いた．これらはアウトリュコス（Autolycus），アリスタルコス，ユークリッド，アポロニウス，アルキメデス，ヒュプシクレス（Hypsicles），テオドシウス（Theodosius），メネレイアス，およびプトレマイオスによる作品の改訂されたアラビア版を含んでいた．

1247年に，アル・ツシは正弦表を計算するために様々な三角法の技術を導入した『*Tahrir al-Majisti*』（*Almagest* の論評）を書いた．また整数の n 乗根の計算を行った［18, p. 4］．したがってニュートン法を知っていたと推測される．アル・ツシは三角法に関する最初の系統的な論文 Transversal 図を書いた．それは，ほとんど即座の影響を持っていないが，後でレギオモンタヌス（1464）に影響を及ぼした［17, p. 48］.

ヨーロッパの中世の『大全』（*Summa*, それに関係のある著作を全部集めた書物）のほとんどはアラビア数学の集大成にすぎない．

ルカ・パチョーリ（Luca Pacioli, 1445–1517）は，ルネッサンス時代のイタリアのフランシスコ会の修道士であり算法教師（*maestri d'abbaco*）[3]である．パチョーリは，平方根を求めるのにニュートン法を使ったが，これは上述したアラブの数学者達から学んだことが推測される．

パチョーリは1494年に『算術，幾何，比例論大全』（*Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalità*　略して『大全』）を著した．これは 600 ページにおよぶ書で，これまでの代数学のほとんどを含んでいる包括的な数学の教科書であり，実用的な算術，幾何学と三角法などの説明がある．またユークリッド『原論』の幾何学を含み，複式簿記について初めて解説された書である（情報源はおおむね明らかにされていない）．パチョーリは複式簿記の父とみなされている．算術の項では乗法や平方根算出の際の工夫をおもに扱い，代数の項では 1 次および 2 次方程式の標準解を取り上げている．

ペドロ・ヌネシュ（Pedro Nunes, 1502–78）（ラテン語 Petrus Nonius（ペトルス・ノニウス））はポルトガル人であり，16 世紀の最も偉大な数学者の一人である．ヌネシュはパチョーリの業績を読んで影響を受けた［5, p. 406］．したがってニュートン法を学んだことが考えられる．またヌ

3　14 世紀初頭のイタリアで登場した新しい階級である「職業的」数学者のことである．彼らは教科書を書き，それを用いて，商人に必要な計算や問題解決のための数学を学ぶために新たに創設された学校で，数学を教えた．

ネシュがアル・ツシのニュートン法を直接学んだことが推測される.

ヌネシュは1529年リスボン大学で道徳・哲学・論理学・形而上学の教授を勤め，1544年にコインブラ大学で数学教授職につき，1562年まで教えた．クラヴィウスはコインブラ大学でヌネシュから講義を受けた．したがってクラヴィウスはヌネシュからニュートン法を学んだことが考えられる.

ヌネシュは，球面 3 角法，幾何学，代数学，物理学，宇宙科学，地理など多岐にわたって業績を残した.

① ヌネシュは1532年に『代数学』（*Libro de Algebra*）を書いた．1567年に『算術と幾何におけるアルヘブラの書』（*Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*）を著した.

ヌネシュは（次の ⑶ で説明する）レギオモンタヌスの平面 3 角法・球面 3 角法を受け継ぎ，それを発展させ，②航海術と③天文学に応用した.

② ヌネシュは，ポルトガルの大航海時代に重要であった航海技術に貢献したことで知られる．1537年に『天球論』（*Tratado da Sphera*）を著した．この書は地図製作法の改善に数学を利用しようとした最初の試みの一つであり，サクロボスコ（Sacrobosco, Joannes de, ?-1256），ゲオルグ・プールバッハ（Georg Purbach, 1423-61），プトレマイオスによる仕事のいくつかの注釈された翻訳と航海術と図に関する 2 つのオリジナルの論文から成っている．航海において地図は重要である．ヌネシュはプトレマイオスやサクロボスコの理論を学んでいる．ここでヌネシュは，ニュートン法を学んだかも知れない.

③ ヌネシュはレギオモンタヌスの『あらゆる種類の 3 角形について』を縦横に駆使して，ポルトガルの天文学に質的発展をもたらせた（海老澤［16, p. 67］）.

⑶ ギリシャ数学のニュートン法 → レギオモンタヌス → ヌネシュ → クラヴィウス

レギオモンタヌス（Regiomontanus, Johannes, 1436-76）（ドイツ名はヨハン・ミューラー・フォン・ケーニヒベルクという長い名前である）は，中世ヨーロッパを代表するドイツの数学者・天文学者である．イタリア国内を旅行しながら勉学を重ねドイツに帰った．プトレマイオスの地球中心説の熱烈な支持者である.

1464年に『プトレマイオスの天文学大全の抜粋』（*Epytoma in almagesti Ptolemei*）を著した．この著作はコペルニクス（Nicolaus Copernicus, 1473-1543）の『天球の回転について』（*De Revolutionibus Orbium Caelestium*, 1543），ニュートン（Isaac Newton, 1643-1727）の『プリンキピア』（*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 自然哲学の数学的諸原理）と並び天文学上の 3 大古典に数えられている．レギオモンタヌスはプトレマイオスの『アルマゲスト』を直接ギリシャ語から正確なラテン語に訳し，1496年に『天文学概要』（*Epitome*）として出版された．その他アルキメデス，アポロニウス，ヘロンおよびほかの科学者たちの著作の訳本を出版しようとしたが，40代はじめに悲劇的な死をむかえた［27, 3 巻，p. 6］．したがってレギオモンタヌスはこれらの著作からニュートン法を学んだことが推測される.

レギオモンタヌスは『アルマゲスト』の翻訳後，平面 3 角形と球面 3 角形の両者において，辺と角の関係を決定する諸規則の簡潔で体系的な取扱いが必要であることに気がつき，1464年に 3 角法の内容である『あらゆる種類の 3 角形について』（*De Triangulis Omnimodis*）を著した．興味深いことには，3 角法についてのそれ以前の著書と同様に，この著作には平面 3 角法の成果を地上の 3 角形を解く［つまり 3 角測量］ために応用した例はまったく収められていない

［5, p. 453］．⑵ で既述したようにヌネシュはレギオモンタヌスの平面 3 角法・球面 3 角法を受け継ぎ，それを発展させたから，ヌネシュはレギオモンタヌスからニュートン法も学んだ可能性がある．

⑷　ギリシャ数学のニュートン法 → アラブの数学者 → レギオモンタヌス → ヌネシュ → クラヴィウス

⑵ で既述したように，ナシル・アル・ディン・アル・ツシは，3 角法に関する最初の系統的な論文 Transversal 図を書いて，それはレギオモンタヌス（1464）に影響を及ぼした．アル・ツシはニュートン法を知っていたと推測されるから，レギオモンタヌスはアル・ツシからニュートン法を学んだことが推測される．

⑸　ギリシャ数学のニュートン法 → クレモナのジェラルド → パチョーリ → ヌネシュ → クラヴィウス

クレモナのジェラルド（Gerard of Cremona, 1114–1187）は，12 世紀に多くのアラビア語の学術書をラテン語に翻訳したイタリアの学者である．ジェラルドの訳した数学の学術書には，アルキメデスの『円の計測』，ユークリッドの『原論』や『ダタ』，プトレマイオスの『アルマゲスト』，フワーリズミーの『代数学』などがある．ルカ・パチョーリはクレモナのジェラルドが翻訳したギリシャの書物からニュートン法を学んだことが考えられる．

中世ヨーロッパの多数の優秀な数学者の誰かが，微分を使うニュートン法以前に，これをギリシャ数学とは関係なく独創的に発見していたという記録が無い限り，ヨーロッパのニュートン法は，これまで推測したようにギリシャから伝わったことになる．日本でここまで調査ができるのだから，本場のヨーロッパではニュートン法のルーツがすでに研究されていて既知なのかもしれない．以上のことから 14，15 世紀のヨーロッパの数学者達は，輸入したギリシャ数学を消化し改良・開発した．その中にニュートン法も含まれ，クラヴィウスはそれを教科書に記述した．

5. クラヴィウスから百川治兵衛までの開平法の流れ

マテオ・リッチ（Matteo Ricci, 1552–1610）はイタリアのイエズス会宣教師・カトリック教会の司祭である．リッチは1572年から1575年までコレジオ・ロマノに在籍し，クラヴィウスから数理科学（算術，幾何学と天文学）を学んだ．リッチは明（1368–1644）の末期に中国に渡来した．中国名を利瑪竇（りまとう）（LìMã dōu）という．そこで明の高官の李之藻（りしそう）（1565–1630）と共著で西洋数学の漢訳本『同文算指』（1613）を出版した．これはリッチの師であるクラヴィウス『*Epitome Arithmeticae Practicae*』のほぼ全訳である．1996年に東北大学名誉教授土倉保［12］は『同文算指』にニュートンの近似式 ⑴ があることを解読した．

カルロ·スピノラ（Carlo Spinola, 1564–1622）はイタリアのイエズス会の宣教師である．スピノラはコレジオ・ロマノでクラヴィウスから数学と天文学を短期間学んだ．したがって『*Epitome Arithmeticae Practicae*』（1583）やニュートンの近似式 ⑴ を知っていたことになる．

当時ヨーロッパの宣教師は，日本の大名達が天文学や数学に異常に興味を示すことを知っていた．そのため宣教師は，日本人にキリスト教の布教のために天文学や数学を利用したのである．スピノラは1602年（慶長7）に長崎に到着し，1604年（慶長9）から江戸幕府が布教を禁じた1611年

（慶長16）にかけて京都の天主堂で7年間説教の傍（かたわ）ら天文数学の講義を行う．これは当時の日本人から非常に歓迎された．しかし江戸幕府はキリスト教により，日本がヨーロッパ諸国の属国になることを恐れて布教禁止令を出した．したがって和算の初期の研究には，キリスト教との関連を考慮しなければ解明できないことが多い．この7年間には25歳の百川治兵衛，『割算書』（1622（元和8），日本の古い数学をまとめた書）の毛利重能（しげよし），35歳の吉田素庵（そあん）（1571－1632），『塵劫記（じんこうき）』[4]（1627（寛永4））の7歳の吉田光由（みつよし）（1598－1672）が外祖父の素庵に連れられて講義を受けた．それは吉田素庵（そあん）が1632年（寛永9）に世を去った後，素庵，毛利，百川らがスピノラの講義を筆記した切支丹学習録が多数光由の手元にあったからである（平山諦（あきら）［1, p. 51］）．光由は7歳から14歳までの間に講義を受けたことになり，幼少のときには講義を十分理解しなかった．光由はこの切支丹学習録を整頓して小型の『塵劫記』を作り1634年（寛永11）と1641年（寛永18）に出版した．百川はスピノラ門下で最も尊敬された人物であるから，才能も優れていたであろう（平山［1, p. 4］）．最近の研究によれば，これらの人々が次代に急激な発展をみせる和算の祖となった．しかしこの時代は，幕府がキリスト教を禁止したので，キリスト教信者が幕府の弾圧を恐れて隠れ切支丹になったり，関連書物を隠したりしたので，当時の和算の研究には困難を伴う．

『新編諸算記』の見出しに「開平法口伝（くでん）知ル」とある．「口伝」とは，「言葉で伝え，教えること．また，それを書きしるしたもの．秘伝書．」を意味する．「開平法口伝知ル」を信用すれば，百川は開平法を誰かから教えられたことになる．平山［1, p. 4, 28］は，スピノラが京都の講義で開平・開立を百川に伝えたのであろうと推測する（これに対し，鈴木久男は百川の独創と考えている[5]）．『同文算指』（1613）にはニュートンの近似式 (1) が説明されている．江戸幕府は1630年に明文で，名指しでマテオ・リッチの32の著作を禁書とした．この中に『同文算指』（1613）も含まれていた．したがって『同文算指』は日本に輸入されていたと考えられる．スピノラは短期間にしろローマ学院でクラヴィウスから学んだから，クラヴィウスの『実用算術摘要』（1583）を知っていたが，マテオ・リッチと李之藻の漢訳本『同文算指』（1613）の存在も知っていたはずである．鈴木武雄［2, pp. 17－19］は，ヨーロッパの開平法は，バビロニアから数千年の歴史においてニュートン法を適用することを発見してきた．百川がいかに抜きん出た存在であったとしても，数学の歴史のほとんどなかった日本で，百川が独力でニュートンの近似式 (1) を発見したことは有り得ない．百川はスピノラから『同文算指』のことを聞き，そこの開平法の部分からヒントを得たであろうと推測する．吉田光由（みつよし）は毛利重能（しげよし），吉田素庵（そあん）等の指導により1627年（寛永4））30歳で『塵劫記』を出版した．『塵劫記』にも開平・開立の説明があるが，光由は開平・開立の方法を十分に理解していなかった（平山［1, pp. 31－32］，鈴木武雄［2, p. 19］）．私は次のように考える．『塵劫記』が出版されたのは1627年であり，百川が佐渡に算学教授[6]のために招かれたのが1630年であるから（1629年

4　日本最初の本格的な和算書である．公式重視でない物語性に富み，江戸の人々を和算好きにさせ，一家に一冊はあるほど超ミリオンセラーとなった．その内容は，四則演算はもとより，度量衡，密度，両替，測量，面積，体積，開平，開立の応用問題や計算方法の解説が書かれている．

5　鈴木久男校注『新編諸算記』pp. 178－179で，開平・開立法を解説している．ここで百川はスピノラの影響はないとし，「開平も開立法もともに“口伝”としており，中国算書を学んだ百川の独創と考えることが適当と考えられるがいかがであろうか？」と述べている．これに対し，鈴木武雄［2, p. 32］は具体的な中国算書の名をあげていない．また，百川の独創という意味が具体的に示されていないと述べている．

には佐渡と本州を往復していたらしい)，百川はそれ以前にニュートンの近似式の存在を知っていた．このことは百川，毛利重能，吉田素庵，光由は同じ時期にスピノラからニュートンの近似式の存在を聞いたと推測される．百川（1580–1638）は大坂・京都に24歳（1604）から48歳（1628）頃までいたことになる．百川は京都を去った後『同文算指』のニュートンの近似式を解読し，この書を自家籠中（かごの中）のものとし，ニュートンの近似式を弟子たちに秘密に伝授した．それゆえ，毛利重能著『割算書』や吉田光由著『塵劫記』から見て，彼らがニュートンの近似式を理解していないのは，百川治兵衛が『同文算指』のニュートンの近似式を解読する以前に京都を離れた結果と見なされる（鈴木武雄［2, pp. 18–19］）．弟子たちは1641年に『新編諸算記』を百川忠兵衛（治兵衛の改名）著として出版した．ここには開平法がニュートンの近似式 (1) として明確に説明されている．さらに百川の弟子たちは1655年（明暦元）に百川忠兵衛著として『新編諸算記』（亀井算の書）を再版したが，この著により**関孝和**（1642（寛永17?）–1708（宝永5））は開平・開立の方法を習得したであろう（平山［1, p. 167］）．

6. 纏　　め

古代バビロニアの数学は，アレクサンドリアのギリシャ数学に輸入され，ヘロンのアルゴリズムやニュートン法がそこの数学者たちより使われ普及していた．これがプトレマイオス（約85–165）の『アルマゲスト』（*Almagest*, 数学体系，天文学体系）では，数理天文学の包括的な専門書なので，平方根の求め方は既知として説明が無く，弦の値として平方根の値しか書かれていない．一方ヘロンの『測量術』（*Metrica*）では，3 角形の面積が平方根で表わされるヘロンの公式が説明されているために，それを求めるためのヘロンのアルゴリズムまで記載されているのである．

ニュートンは1665年から1667年にかけて微分積分法を発見したが，これは数学史の上では一大飛躍の発見である．そして微分を使いニュートン法 (2)（1685–1690）が考案された．このことにより 15 世紀中頃までのヨーロッパでは，すでにニュートン法が使われていたことが再認識される．すなわち中世のヨーロッパではギリシャの数学書がラテン語に翻訳され，ヨーロッパの数学者達は『アルマゲスト』の数理天文学やニュートン法が説明してあるテオンの著作を大学で教えていた．そのうちの第一人者がクラヴィウスである．クラヴィウスはテオンのニュートン法を読んでいたと推測される．またクラヴィウスは，アラブの数学者，レギオモンタヌス，パチョーリ，ヌネシュを通してギリシャのニュートン法を学んだルートも推測される．クラヴィウスは『実用算術摘要』でニュートン法を記述した．

6　当時江戸幕府の財政を支えていたのは佐渡金銀山である．そのため幕府は最高水準の人材，科学技術を佐渡金銀山に投入した．また他国から多くの鉱山労働者や商人が集まり，佐渡金銀山がある相川町には 3 平方kmの狭いところに約 3.5～5 万人が住んでいた．このため鉱山関係の仕事や鉱山に必要な大量の物資を扱う商業活動や経済活動のために数学が必要となりだした．また慶長（1596–1615）から元和（1615–1624）にかけて急増した地役人の勤めに数学が必要となりだした．このため日本のトップの和算家百川治兵衛が関西から佐渡に招かれたのである．その後百川の算学は全島に広まった．百川の算学を学んだ佐渡出身の村瀬義益は，3 次方程式を逐次近似法を使い，3 通りの方法で解き，多くの和算の研究書に必ず登場する人物である．

その後日本では，クラヴィウスから数学を学んだイタリア宣教師スピノラが苦労の末来日し，1604年から1611年にかけて京都の天主堂で天文数学の講義を行った．1641年の百川著『新編諸算記』の見出しに「開平法口伝知る」とある．スピノラは百川治兵衛に『実用算術摘要』の全訳である『同文算指』やニュートン法のことを教えたと推測される．百川は算盤（そろばん）の大家で，算盤の一珠を導入し，これまでの帰除法の代わりに，現在の商除法を導入した．このことにより算盤で行う割算が容易になるのである．百川は1630年（寛永7）に佐渡へ招かれた．ここで百川は算盤で商除法を用いて開平・開立を素早く行い，皆を驚かせたことであろう．百川の算術は魔術のように思われ，切支丹の疑いにより，1638年（寛永15）に入牢した．しかし弟子達が証人に立って許され出獄できた．当時，幕府に要請して出獄できることは異例のことである．樋口権右衛門（1601－1683）は西洋測量術の開祖であり天文学者として有名である．樋口は建部賢弘（1664－1739）を筆頭として多数の優秀な門弟を育てた．この樋口でさえ，切支丹の容疑で21年間も投獄されたから，百川が如何に重要人物であったか分かる．百川はこの年の9月に新潟で没した．改名は百川九也．

本稿は「古代ギリシャのニュートン法がヨーロッパを経由して江戸時代の初期の和算家たちに伝わった」という大きな飛躍の一考察である．しかし現在の日本では，中学校・高等学校で教えられる幾何学はユークリッド幾何学であるから，今から約2300年前の古代ギリシャの数学を直接学んでいるのである．さらに江戸幕府の財政を支えた佐渡金銀山に導入された技術は，古代ギリシャ科学と多く関連していることが分かってきた．このことに関しては稿を改めて報告する．

付　録

ニュートン法　代数方程式 $f(x)=0$ の実根 $x=\alpha$ を数値計算で求める場合に使われる反復法のことである．$y=f(x)$ のグラフ上の適当な点 $(x_0, f(x_0))$ における接線の方程式は

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

である．この接線が x 軸と交わる x 座標は

$$x_0=\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

である．この値を x_1 とおくと，これは x_0 より α に近い値となる．つぎに

$$x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

を求めれば，この値は x_1 より α に近い値となる．そこで数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式できめる．

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ (n=0, 1, 2, \cdots)$$

この漸化式は，$f'(x)$ が 0 でない限り根 α に収束する．これを**ニュートン法の漸化式（反復式）**（1685－90）という．これは収束が速い．このような計算方法を**逐次近似法**とよび，数値計算にはコンピュータが威力を発揮する．

正の数 A の平方根を求める場合，$f(x)=x^2-A$ とおいてニュートン法を適用すれば，A の平方根を求める漸化式

$$x_{n+1}=x_n+\frac{A-x_n{}^2}{2x_n}\ (n=0,1,2,\cdots)$$

が導かれる．これを $\sqrt{A}$ を求める**ニュートン法の漸化式（反復式）**という．ここで x_0 は初期値である．$x>\sqrt{A}$ の範囲では $f(x)=x^2-A>0$ かつ $f'(x)=2x>0$ であるから，この数列は単調減少する．また下に有界であるから，この数列は収束する．したがって $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ とすれば，上の漸化式において $n\to\infty$ のとき

$$\alpha=\alpha+\frac{A-\alpha^2}{2\alpha}$$

となる．これより $\alpha>0$ なら $\sqrt{A}=\alpha$ となる．例えば $A=20$ のときには $4^2=16$，$5^2=25$ であるから，$x_0=5$ として出発して，次々に代入して計算して行くと 20 の平方根の近似値が求まる．

ニュートン（Isaac Newton, 1642-1727, イギリス）はケンブリッジ大学で学び，1669年にそこのルーカス教授になった．ルーカス教授とは，ケンブリッジ大学の数学関連分野の教授職の一つである．2008年現在のルーカス教授は，1980年に選任された理論物理学者のスティーヴン・ホーキング（Stephen Hawking, 1942- ）である．ニュートン物理学（力学）を建設し，近代物理学を確立した．

ニュートンは1665年から1667年にかけて，微分積分法，万有引力，色彩理論の 3 大発見をした．1687年に『プリンキピア』（*Principia*, 自然哲学の数学的原理）を出版した．この書は，プトレマイオスの『アルマゲスト』，コペルニクスの『天体の軌道について』（1543）と並び，天文学上の 3 大古典に数えられている．

⑶，⑷を使った数値例

カッツ［5, p. 34］は

$$\sqrt{a^2-b}\fallingdotseq a-\frac{b}{2a}$$

を使用して

$$\sqrt{2}=\sqrt{1;25^2-0;00,25}$$

$$\fallingdotseq 1;25-0;30\cdot 0;00{,}25\cdot 0;42,21,10$$

$$=1;24,51,10,35,25$$

を計算している．また上垣［7, p. 29］は ⑷ を使い，60 進数で第 4 近似値まで計算して，

$$\sqrt{2}=1;24,51,10$$

になることを確かめている．

参考文献

［1］ 平山 諦：『和算の誕生』，恒星社厚生閣，1993年5月
［2］ 鈴木武雄：『和算の成立』，恒星社厚生閣，2004年7月
［3］ 日本数学会編集：『岩波数学辞典』第4版，岩波書店，2007年3月
［4］ 安 大玉：『明末西洋科学東伝史』『天学初函』器編の研究，知泉書館，2007年8月

本書は，安氏が2006年3月に，東京大学大学院人文社会系研究科に提出した博士学位論文（『天学初函』器編の研究）に加筆し，内容に一部修正を加えたものである．
[5] ヴィクター J. カッツ著，上野・三浦監訳：『カッツ数学の歴史』，共立出版，2005年7月
[6] 伊達宗行：『「数」の日本史』，日本経済新聞社，2002年6月
[7] 上垣　涉：『数学の歴史』，ベレ出版，2006年1月
[8] 中村正弘・鈴木武雄：バビロンから作用素平均へ―平方根の近似法を巡る五千年の旅―，大阪教育大学数学教育研究第26号，1996, pp. 195－206.
[9] プトレマイオス著，薮内清訳：『アルマゲスト』，恒星社厚生閣，1982年3月
[10] 浅井照明：三平方の定理（ピタゴラスの定理）の歴史，http://mailsrv.nara-edu.ac.jp/~asait/pythagorean/pytha.htm
[11] 上垣　涉：『アルキメデスを読む』，日本評論社，1999年10月
[12] 土倉　保：「同文算指」の開平法，大阪教育大学数学教育研究第26号，1996，pp. 185－188.
[13] 真島秀行：角についての数学，数学通信第10巻第2号，日本数学会，2005年
[14] 小川束・平野葉一：『数学の歴史』和算と西欧数学の発展，朝倉書店，2003年10月
[15] 梅谷　武：代数記号の歴史，http://math.pisan-dub.jp/concrete/?itemid＝33
[16] 海老澤有道：『南蛮学統の研究増補版』，創文社，1978年3月
[17] DAVID SINGMASTER：CYRILLIC AND OTHER SPECIAL CHARACTERS, http://www.g4g4.com/pMyCD5/CYRILLIC.doc
[18] J J O'Connor and E F Robertson：Nasir al Din al Tusi －Iranian Experimental Physicist－, http://www. geocities.com/ansari213/tusi1.htm
[19] David Eugene Smith：History of Mathematics, http://www2m.biglobe.ne.jp/~m-souda/mysouda/math/smith/contents.html#mo6
[20] 中山　茂編：『天文学人名辞典』，恒星社厚生閣，1983年3月
[21] 金子　勉編：『百川治兵衛和算書稿本』（金井町文化財調査報告第9集），金井町教育委員会/生涯学習課，1992年3月
[22] 広瀬秀雄・中山茂・大塚敬節：『近世科学思想』下，岩波書店，1971年8月
[23] 古島敏雄・安芸皎一：『近世科学思想』上，岩波書店，1972年
[24] 宇佐美正一郎：『自然科学への招待』，開成出版，1981年3月
[25] 藤原松三郎：東洋数学史への招待―藤原松三郎数学史論文集―，藤原松三郎先生数学史論文刊行会編，東北大学出版会，2007年
[26] 下平和夫監修，百川治兵衛著，鈴木久男校注：『新編諸算記』（江戸初期和算選書　第4巻1），研成社，1994年10月
[27] カール・ベンジャミン・ボイヤー著，加賀美鐵雄・浦野由有訳：『数学の歴史』（全5巻），朝倉書店，1985年7月
[28] 中村幸四郎：『近世数学の歴史』，日本評論社，1980年9月
[29] 伊東俊太郎・原亨吉・村田全：『数学史』，筑摩書房，1975年4月
[30] 伊東俊太郎編：『数学の歴史Ⅱ　中世の数学』，共立出版，1987年9月
[31] 高橋秀裕：『ニュートン―流率法の変容』，東京大学出版会，2003年8月
[32] ロシュディー・ラーシェド著，三村太郎訳：『アラビア数学の展開』，東京大学出版会，2004年8月
[33] フロリアン・カジョリ著，石井省吾訳：
数学史〈上〉古代・中世・ルネッサンス，津軽書房，1970
数学史〈中〉近世，津軽書房，1975
数学史〈下〉最近代，津軽書房，1974
[34] 堀口俊二：和算家百川治兵衛と測量家静野与右衛門の系統，日本数学会2007年度秋季総合分科会，数学基礎論および歴史分科会講演アブストラクト，2007年9月，pp. 16－17.
[35] ________：樋口権右衛門の測量学と天文学の系統について，日本数学会2007年度秋季総合分科会，数

学基礎論および歴史分科会講演アブストラクト，2007年9月，pp. 14－15.

THE ROOTS OF AN ALGORITHM OF THE SQUARE ROOT IN WASAN (JAPANESE OLD MATHEMATHICS IN EDO PERIOD) —FROM GREECE TO JAPAN—

Shunji HORIGUCHI

2008年10月
新潟産業大学経済学部紀要　第35号別刷

BULLETIN OF NIIGATA SANGYO UNIVERSITY
FACULTY OF ECONOMICS

No.35　October　2008